CHƯƠNG I: HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG

I. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ ĐƯỜNG CAO TRONG TAM GIÁC VUÔNG

*Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH.*

*Định lí Pi-ta-go: *

*;  *

* *

1. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = 3cm, BC = 5cm. AH là đường cao. Tính BH, CH, AC và AH.

*HD:*

*, ,* , .

1. Cho tam giác ABC vuông tại A có AC = 10cm, AB = 8cm. AH là đường cao. Tính BC, BH, CH, AH.

*HD:*

*BC=2; BH=32/41 ; CH=50/41; AH=40/41.*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A có BC = 12cm. Tính chiều dài hai cạnh góc vuông biết .

*HD: , .*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao AH. Biết BH = 10cm, CH = 42 cm. Tính BC, AH, AB và AC.

*HD:*

*, , , .*

1. Hình thang cân ABCD có đáy lớn AB = 30cm, đáy nhỏ CD = 10cm và góc A là a) Tính cạnh BC. b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và CD. Tính MN.

*HD:*

*a, Gọi P và Q là chân đường cao kẻ từ D và C xuống AB: AP=QB mà PQ=DC=10cm nên AP=QB=(30-10):2=10cm.*

*b, NM=DP=AP.=10cm.*

1. Cho tứ giác lồi ABCD có AB = AC = AD = 10cm, góc B bằng  và góc A là a) Tính đường chéo BD. b) Tính các khoảng cách BH và DK từ B và D đến AC. c)Tính HK. d) Vẽ BE ⊥ DC kéo dài. Tính BE, CE và DC.

*HD:*

*a, BD2=AB2+AD2 => BD=10cm.*

*b, ABC đều (AB=AC mà ) nên BH=5cm,*

*ADK có nên KD=1/2AD=5cm,*

*c, ABH có nên AH=1/2AB=5cm, mà AK2=AD2-DK2=75 nên AK=5cm*

*suy ra HK=5-5 cm.*

*d, ADC cân có nên =>*

*nên BEC vuông cân tại E nên BE=EC mà BE2+EC2=BC2 => BE=EC=5cm.*

*Trong KDC có KD=5cm, KC=AC-AK=10-5 cm Dùng pytago tính DC.*

1. Cho đoạn thẳng AB = 2*a*. Từ trung điểm O của AB vẽ tia O*x* ⊥ AB. Trên O*x*, lấy điểm D sao cho . Từ B kẻ BC vuông góc với đường thẳng AD. a) Tính AD, AC và BC theo *a.* b) Kéo dài DO một đoạn OE = *a*. Chứng minh bốn điểm A, B, C và E cùng nằm trên một đường tròn.

*HD:*

*a, AD= ADO ABC nên AD.AC=AB.AO => AC= Dùng pytago cho tam giác ABC để tính BC= .*

*b, Chỉ ra OA=OB=OC=OE.*

1. Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Trên HB và HC lần lượt lấy các điểm M, N sao cho góc AMC= góc ANB=900. Chứng minh: AM = AN.

*HD: ABD ACE .*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết  và AH = 420. Tính chu vi tam giác ABC.

*HD:*

*Đặt . Từ AH.BC = AB.AC . HD: .*

1. Cho hình thang ABCD vuông góc tại A và D. Hai đường chéo vuông góc với nhau tại O. Biết , tính diện tích hình thang ABCD.

*Tính được: OB =* 4*, OD =* 9*, OC =* 13,5*. HD: .*

II. TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

**1. Định nghĩa:** *Cho tam giác vuông có góc nhọn .*

*; ; ; *

***Chú ý:***

*Cho góc nhọn . Ta có: .*

*Cho 2 góc nhọn , . Nếu  (hoặc , hoặc , hoặc ) thì .*

**2. Tỉ số lượng giác của hai góc phụ nhau:**

*Nếu hai góc phụ nhau thì sin góc này bằng côsin góc kia, tang góc này bằng cotang góc kia.*

*Sin (900-a) = cosa tan(900-a)=cotana*

*cos(900-a)=sina cotan(900-a)=tana*

*Ví dụ: sin 250=cos650; tan200=cotan700…..*

**3. Tỉ số lượng giác của các góc đặc biệt:**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Tỉ số LG |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  | 1 |  |
|  |  | 1 |  |

**4. Một số hệ thức lượng giác**

*; ; ;*

*; ; *

**5. Công thức tính diện tích tam giác:**

= P.r =

R: Bán kính đường tròn ngoại tiếp, r: Bán kính đường tròn nội tiếp.

( Diện tích tam giác bằng một nửa tích hai cạnh kề với sin góc xen giữa hai cạnh đó).

Trong tam giác bất kì:

Với a là cạnh đối diện góc A, b là cạnh đối diện góc B, c là cạnh đối diện góc C.

**BÀI TẬP:**

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết BH = 64cm và CH = 81cm. Tính các cạnh và góc tam giác ABC.

*HD: AB2=BH.BC nên AB=96,3cm; AC2=HC.BC nên AC=108,4cm*

*CosC= nên .*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm các tỉ số lượng giác của góc B khi: a) BC = 5cm, AB = 3cm. b) BC = 13 cm, AC = 12 cm. c) AC= 4cm, AB=3cm.

*HD:*

*a) ; *

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, có AB = 10cm và AC = 15cm. a) Tính góc B. b) Phân giác trong góc B cắt AC tại I. Tính AI. c) Vẽ AH ⊥ BI tại H. Tính AH.

*HD:*

*a, tanB= nên .*

*b, tan nên AI=AB. tan=10.tan280 =5,3cm*

*c, sin nên AH=AB.sin = 10.sin280 =4,7cm.*

1. Tính giá trị các biểu thức sau: a) . b) . c)  d)  e)  f) 

*HD: Dùng công thức: sin(900-a)=cosa; tan(900-a)=cota.*

*a)(*

*b)  c)  d)* 0 *e)* 2 *f)* 0.

1. Cho biết một tỉ số lượng giác của góc nhọn , tính các tỉ số lượng giác còn lại của : a)  b)  c)  d) 

*HD: Dùng các công thức trong mục 4 ( một số hệ thức lượng ) để tính. Chú ý góc nhọn thì sin >0; cos >0.*

*a)  b) *

1. a. Cho góc nhọn . Biết . Tính . b. Cho tan=2. Tính A=(sin-3cos)/(3sin+7cos)

*HD:*

*a, cos- sin= (1) nên (cos -sin )2= hay cos2 + sin2 -2cos.sin = hay sin.cos =*

*Ta có: (cos + sin )2= cos2 + sin2 + 2cos.sin= nên cos+sin= (2)Từ (1)(2) tính được cos và sin, từ đó tính cot. (HD:* )

*b, Chia cả tử số và mẫu số cho cos ta được: A= .*

1. Cho tam giác ABC vuông tại C. Biết . Tính .

*HD:* .

1. Rút gọn các biểu thức sau: a)  b)  c)  d)  e)  f) 

*HD:*

*a)  b)* 2 *c)  d)* 1 *e)  f)* 1.

1. Chứng minh các hệ thức sau: a)  b) 

*HD:*

*a, Biến đổi tương đương hai vế*

*b, Biến đổi vế trái.*

1. Cho tam giác nhọn ABC. Gọi *a, b, c* lần lượt là độ dài các cạnh đối diện với các đỉnh A, B, C. a) Chứng minh: . b) Có thể xảy ra đẳng thức  không? c) Chứng minh: ( Diện tích tam giác bằng một nửa tích hai cạnh kề với sin góc xen giữa hai cạnh đó).

*HD: a) Vẽ đường cao AH. Xét AHB và AHC có:*

*nên hay .*

*Tương tự ta cũng chứng minh :*

*b) không. Vì . (tính chất dãy tỉ số bằng nhau)*

*Nếu thì a=b+c: Vô lí.*

*c) mà*

*Suy ra:*

*. Các công thức khác chứng minh tương tự.*

III. MỘT SỐ HỆ THỨC VỀ CẠNH VÀ GÓC TRONG TAM GIÁC VUÔNG

*Cho tam giác ABC vuông tại A có BC = a, AC = b, AB = c.*

*; *

*; *

**BÀI TẬP:**

1. Giải tam giác vuông ABC, biết góc A=900 và: a)  b) 

*HD:*

*a)B=420, C=480, c=11,18cm b) B=600, C=300, a=14cm.*

1. Cho tam giác ABC có góc B=600, C=500, AC=35cm. Tính diện tích tam giác ABC.

*HD: . Vẽ đường cao AH. Tính AH, HB, HC.*

1. Cho tứ giác ABCD có góc A=D=900, C=400, AB=4cm, AD=3cm. Tính diện tích tứ giác.

*HD: . Vẽ BH CD. Tính DH, BH, CH.*

1. Cho tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết , góc AOB =500. Tính diện tích tứ giác ABCD.

*HD: . Vẽ AH BD, CK BD. Chú ý: .*

1. Chứng minh rằng: a) Diện tích của một tam giác bằng nửa tích của hai cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy. b) Diện tích của một hình bình hành bằng tích của hai cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.

*HD: a) Gọi là góc nhọn tạo bởi hai đường thẳng AB, AC. Vẽ đường cao CH. *

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

1. Cho tam giác ABC có AB = 21*m*, AC = 28*m*, BC = 35*m*. a) Chứng minh tam giác ABC vuông. b) Tính .

*HD:*

*a, Dùng Pytago b,*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, đường phân giác AD. Cho biết HB = 112, HC = 63. a) Tính độ dài AH. b) Tính độ dài AD.

*HD: a) AH =* 84 *b) .*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết AH = 5, CH = 6. a) Tính AB, AC, BC, BH. b) Tính diện tích tam giác ABC.

*HD: a) , ,  b) .*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết AH = 16, BH = 25. a) Tính AB, AC, BC, CH. b) Tính diện tích tam giác ABC.

*HD:*

*a, Áp dụng định lí Pytago cho tam giác vuông AHB để tính AB.*

*Dùng công thức: AB2=BH.BC để tính BC và suy ra HC.*

*AH.BC=AC.AB để tính AC.*

*b, .*

1. Cho hình thang ABCD có góc A=D=900 và hai đường chéo vuông góc với nhau tại O. a) Chứng minh hình thang này có chiều cao bằng trung bình nhân của hai đáy. b) Cho AB = 9, CD = 16. Tính diện tích hình thang ABCD. c) Tính độ dài các đoạn thẳng OA, OB, OC, OD.

*HD: a) Vẽ AE // BD AB = ED và AE AC. b) S = 150*

*c) .*

1. Tính diện tích hình thang ABCD (AB // CD), biết AB = 10, CD = 27, AC = 12, BD = 35.

*HD: S = 210. Vẽ BE // AC (E CD) .*

1. Cho biết chu vi của một tam giác bằng 120cm. Độ dài các cạnh tỉ lệ với 8, 15, 17. a) Chứng minh rằng tam giác đó là một tam giác vuông. b) Tính khoảng cách từ giao điểm ba đường phân giác đến mỗi cạnh.

*HD: a) Tính được AB = 24cm, AC = 45cm, BC = 51cm ABC vuông tại A.*

*b) Gọi O là giao điểm ba đường phân giác. .*

*Với ; ; ; ta được r=9cm.*

1. Cho tam giác ABC cân tại A, đường cao AH. Biết góc A=480, AH=13cm. Tinh chu vi ABC

*HD: .*

1. Cho ABC vuông tại A, AB = *a*, AC = 3*a*. Trên cạnh AC lấy các điểm D, E sao cho AD = DE = EC. a) Chứng minh . b) Chứng minh  đồng dạng CDB. c) Tính tổng góc (AEB+BCD).

*HD: a)  c) Góc(*AEB+BCD)=ADB=450*.*

1. Cho hình thang ABCD có hai cạnh bên AD và BC bằng nhau, đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC. Biết AD = 5*a*, AC = 12*a*. a) Tính . b) Tính diện tích hình thang ABCD.

*HD: a) *

*b) TH1: ABCD là hình thang cân, kẻ CH và DM cùng vuông góc với AB,*

*- Tính CH rồi suy ra HB, mà AM=HB nên DC=HM. => SABCD*

*TH2: Nếu ABCD là hình bình hành thì SABCD=2SABC=AC.CB*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với A qua điểm B. Trên tia đối của tia HA lấy điểm E sao cho HE = 2HA. Gọi I là hình chiếu của D trên HE. a) Tính AB, AC, HC, biết AH = 4cm, HB = 3cm. b) Tính  c) Chứng minh d) Chứng minh: .

*HD: a) , ,  b)* =3/2

*d)góc =900.*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A (AB < AC), đường cao AH. Đặt BC = *a*, CA = *b*, AB = *c*, AH = *h*. Chứng minh rằng tam giác có các cạnh  là một tam giác vuông.

*HD: Chứng minh .*

1. Cho tam giác nhọn ABC, diện tích bằng 1. Vẽ ba đường cao AD, BE, CF. Chứng minh rằng: a) . b) .

*HD: a) Chứng minh  b) *

1. Cho ABC vuông tại A có . Tính các tỉ số lượng giác của góc B và C.

*HD: ; ; ; .*

1. Cho tam giác ABC có ba đường cao AM, BN, CL. Chứng minh: a) ANL ∽ABC b) 

*HD:*

*a, Xét ALC và ANB có nên ALC ANB (g.g) nên*

*.*

*Xét ANL và ABC có ; nên ANL ABC (c.g.c)*

*b, AN=AB.cosA; BL=BC.cosB; CM=AC.cosC.*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A có , BC = 4cm. a) Kẻ đường cao AH, đường trung tuyến AM. Tính , AH, AM, HM, HC. b) Chứng minh rằng: .

*HD: a) ; ; ; ; *

*b) .*

1. Cho tam giác ABC cân tại A, Có , BC = 1cm. Kẻ phân giác CD. Gọi H là hình chiếu vuông góc của D trên AC. a) Tính AD, DC. b) Kẻ CK  BD. Giải tam giác BKC. c) Chứng minh rằng .

*HD:*

*a, BCD cân tại C, CDA cân tại A ( Hai góc ở đáy bằng nhau)*

*Nên DC=DA=BC=1cm*

*b, BKC có:*

*nên CK=BC.sinB=1.sin720*

*Nên BK=BC.cosB=1.cos720*

*c, cos360=cosA= ; đặt AB=AC=2x, suy ra DB=AB-AD=2x-1, theo tính chất phân giác ta có:*

*suy ra . Tìm được x= ( vì x>0) hay AH= .*

*Thay AD,AH vào cos360=cosA= => đpcm.*

1. Cho tam giác ABC có AB = 1, , . Trên cạnh BC lấy điểm E sao cho BE = 1. Vẽ ED // AB (D thuộc AC). Đường thẳng qua A vuông góc với AC cắt BC tại F. Gọi H là hình chiếu của A trên cạnh BC. a) Chứng minh rằng tam giác ABE đều. Tính AH. b) Chứng minh góc =450. c) Tính các tỉ số lượng giác của góc AED và góc AEF. d) Chứng minh . Từ đó suy ra AD = AF.

e) Chứng minh rằng:  .

*HD:*

*a, BEA có AB=BE=1cm và nên BEA đều. AH=AB.cosB=1.cos600= .*

*b,*

*Vì mà nên .*

*c, Ta có: , từ đó tính sin600, cos600…*

*d, AED và AEF có: AE chung, ; nên*

*AED = AEF ( g.c.g) và AD=AF ( hai cạnh tương ứng).*

*e, Ta có:*

*.*

1. Giải tam giác ABC, biết: a) b) . c) Trung tuyến ứng với cạnh huyền , đường cao AH = 4. d) Trung tuyến ứng với cạnh huyền , một góc nhọn bằng .

*HD:*

*a, ; AB=BC.cosB=10.cos750=2,59cm; AC=9,66cm*

*b, ; Kẻ AH vuông góc BC thì BH=HC.*

*Ta có: BH=AB.cosB=6.cos300= cm nên BC= cm.*

*c, BC==2ma=10 cm ( tính chất trung tuyến tam giác vuông).*

*AM=BM=5cm mà AH=4cm nên HM=3cm ( dùng Pytago) hay BH=2cm.*

*Mà BH2+AH2=AB2. Từ đó tính AB và AC ( Dùng Pytago).*

*d, nên ; BC=2ma=10 cm ( tính chất trung tuyến tam giác vuông)*

*AB=BC.cosB=10.cos470=6,8cm; AC= 7,33cm.*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, AB = 3cm, BC = 6cm. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của H trên cạnh AB và AC. a) Giải tam giác vuông ABC. b) Tính độ dài AH và chứng minh: EF = AH. c) Tính: EA.EB + AF.FC.

*HD: a) , B=600, C=300 b) *

*c)AE.EB = EH2; AF.FC = HF2; nên AE.EB+AF.FC=EH2+HF2=EF2=AH2= .*

CHƯƠNG II: ĐƯỜNG TRÒN

I. SỰ XÁC ĐỊNH ĐƯỜNG TRÒN. TÍNH CHẤT ĐỐI XỨNG CỦA ĐƯỜNG TRÒN

**1. Đường tròn**

*Đường tròn tâm O bán kính R (R > 0) là hình gồm các điểm cách điểm O một khoảng bằng R.*

**2. Vị trí tương đối của một điểm đối với một đường tròn**

*Cho đường tròn (O; R) và điểm M.*

*M nằm trên đường tròn (O; R) .*

*M nằm trong đường tròn (O; R) .*

*M nằm ngoài đường tròn (O; R) .*

**3. Cách xác định đường tròn**

*Qua ba điểm không thẳng hàng, ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.*

**4. Tính chất đối xứng của đường tròn**

*Đường tròn là hình có* ***tâm đối xứng****. Tâm của đường tròn là tâm đối xứng của đường tròn đó.*

*Đường tròn là hình có* ***trục đối xứng****. Bất kì đường kính nào cũng là trục đối xứng của đường tròn.*

**BÀI TẬP:**

1. Cho tứ giác ABCD có . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BD, DC và CA. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

*HD: Chứng minh MNPQ là hình chữ nhật.*

1. Cho hình thoi ABCD có . Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA. Chứng minh 6 điểm E, F, G, H, B, D cùng nằm trên một đường tròn.

*HD: Chứng minh EFGH là hình chữ nhật, OBE là tam giác đều.*

1. Cho hình thoi ABCD. Đường trung trực của cạnh AB cắt BD tại E và cắt AC tại F. Chứng minh E, F lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và ABD.

*HD: Chứng minh E, F là giao điểm của các đường trung trực tương ứng.*

1. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Vẽ đường tròn (I) đường kính OA. Bán kính OC của đường tròn (O) cắt đường tròn (I) tại D. Vẽ CH AB. Chứng minh tứ giác ACDH là hình thang cân.

*HD: Chứng minh ADO = CHO OD = OH, AD = CH. Chứng minh HD // AC.*

1. Cho hình thang ABCD (AB // CD, AB < CD) có , CD = 2AD. Chứng minh 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

*HD: Chứng minh , với I là trung điểm của CD.*

1. Cho hình thoi ABCD. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. M, N, R và S lần lượt là hình chiếu của O trên AB, BC, CD và DA. Chứng minh 4 điểm M, N, R và S cùng thuộc một đường tròn.

*HD:*

*AOB=COB nên hay mà AB=BC nên OM=ON.*

*Chứng minh tương tự ta được: MO=ON=OR=OS nên M,N,R,S cùng thuộc một đường tròn.*

1. Cho hai đường thẳng *xy* và *xy* vuông góc nhau tại O. Một đoạn thẳng AB = 6cm chuyển động sao cho A luôn nằm trên *xy* và B trên *xy* . Hỏi trung điểm M của AB chuyển động trên đường nào?

*HD:*

*AOB vuông tại O nên gọi I là trung điểm AB thì OI là trung tuyến => OI=3cm,*

*Khi A,B thay đổi thì OI=3cm nên trung điểm I của AB luôn chạy trên đường tròn (O;3cm)*

1. Cho tam giác ABC có các đường cao BH và CK. a) Chứng minh: B, K, H và C cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm đường tròn đó. b) So sánh KH và BC.

*HD:*

*a, Gọi I là trung điểm BC, vì CHB và CKB vuông nên HI=KI=IC=IB nên B,C,H,K cùng nằm trên đường tròn tâm I.*

*b, Vì BC là đường kính nên KH<BC.*

II. DÂY CỦA ĐƯỜNG TRÒN

**1. So sánh độ dài của đường kính và dây**

*Trong các dây của đường tròn, dây lớn nhất là đường kính.*

**2. Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây**

*Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy.*

*Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.*

**3. Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ tâm đến dây**

*Trong một đường tròn:*

*– Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm.*

*– Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.*

*Trong hai dây của một đường tròn:*

*– Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn.*

*– Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn.*

**4. Đường tròn ngoại tiếp tam giác:**

*Đi qua 3 đỉnh của tam giác và có tâm là giao 3 đường trung trực của 3 cạnh.*

*Với tam giác vuông, tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm cạnh huyền.*

**BÀI TẬP:**

1. Cho đường tròn (O; R) và ba dây AB, AC, AD. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của B trên các đường thẳng AC, AD. Chứng minh rằng MN ≤ 2R.

*HD: Chứng minh bốn điểm A, B, M, N cùng nằm trên đường tròn đường kính AB MN ≤ AB.*

1. Cho đường tròn (O; R). Vẽ hai dây AB và CD vuông góc với nhau. Chứng minh rằng: .

*HD:* *.*

1. Cho đường tròn (O; R) và dây AB không đi qua tâm. Gọi M là trung điểm của AB. Qua M vẽ dây CD không trùng với AB. Chứng minh rằng điểm M không là trung điểm của CD.

*HD: Dùng phương pháp phản chứng. Giả sử M là trung điểm của CD vô lý.*

1. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Gọi M là một điểm nằm giữa A và B. Qua M vẽ dây CD vuông góc với AB. Lấy điểm E đối xứng với A qua M. a) Tứ giác ACED là hình gì? Vì sao? b) Giả sử . Tính CD. c)\* Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của M trên CA và CB. Chứng minh: .

*HD: a) ACED là hình thoi b) *

*c) *

*Vì Với MA.MB=MC2; AC.BC=AM.AB.*

1. Cho đường tròn (O; R) và hai dây AB, CD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I. Giả sử . Tính khoảng cách từ tâm O đến mỗi dây.

*HD: .*

1. Cho đường tròn (O; R). Vẽ hai bán kính OA, OB. Trên các bán kính OA, OB lần lượt lấy các điểm M, N sao cho OM = ON. Vẽ dây CD đi qua M, N (M ở giữa C và N). a) Chứng minh CM = DN. b) Giả sử . Tính OM theo R sao cho .

*HD:*

*a) Vẽ OH CD H là trung điểm của CD và MN.*

*b) Đặt OH = x. C. minh HOM vuông cân HM = x. Do CM = MN = ND HC = 3x*

*.*

1. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của OA, OB. Qua M, N lần lượt vẽ các dây CD và EF song song với nhau (C và E cùng nằm trên một nửa đường tròn đường kính AB). a) Chứng minh tứ giác CDEF là hình chữ nhật. b) Giả sử CD và EF cùng tạo với AB một góc nhọn . Tính diện tích hình chữ nhật CDFE.

*HD: a) Vẽ OH CD. Đường thẳng OH cắt EF tại K OH = OK CD = EF.*

*b) . V ì nên CF là đường kính. . *

1. Cho đường tròn (O) và một dây CD. Từ O kẻ tia vuông góc với CD tại M, cắt (O) tại H. Tính bán kính R của (O) biết: CD = 16cm và MH = 4cm.

*HD:*

*OM=R-4 và MD=8cm.*

*Áp dụng định lý Pytago cho tam giác OMD:*

*MO2+MD2=OD2 => (R-4)2+64=R2 => R=10cm.*

1. Cho đường tròn (O; 12cm) có đường kính CD. Vẽ dây MN qua trung điểm I của OC sao cho góc NID bằng . Tính MN.

*HD:*

*Gọi H là trung điểm MN suy ra OH vuông góc MN.*

*OH=IO.sin300=3 cm*

*HO2+HM2=R2 để tính HM và MN=2HM.*

III. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ ĐƯỜNG TRÒN

**1. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn**

*Cho đường tròn (O; R) và đường thẳng . Đặt .*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| VTTĐ của đường thẳng và đường tròn | Số điểm chung | Hệ thức giữa *d* và R |
| Đường thẳng và đường tròn cắt nhau | 2 |  |
| Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau | 1 |  |
| Đường thẳng và đường tròn không giao nhau | 0 |  |

## Khi đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau thì đường thẳng là **tiếp tuyến** của đường tròn. Điểm chung của đường thẳng và đường tròn là **tiếp điểm**.

**2. Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến của đường tròn**

*Nếu một đường thẳng là tiếp tuyến của một đường tròn thì nó vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.*

*Nếu một đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó thì đường thẳng ấy là tiếp tuyến của đường tròn.*

**3. Tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau**

*Nếu hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì:*

*Điểm đó cách đều hai tiếp điểm.*

*Tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến.*

*Tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.*

**4. Đường tròn nội tiếp tam giác**

*Đường tròn tiếp xúc với ba cạnh của một tam giác là* ***đường tròn nội tiếp*** *tam giác, còn tam giác là* ***ngoại tiếp*** *đường tròn.*

*Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao điểm của các đường phân giác các góc trong tam giác.*

**5. Đường tròn bàng tiếp tam giác**

*Đường tròn tiếp xúc với một cạnh của một tam giác và tiếp xúc với các phần kéo dài của hai cạnh kia là* ***đường tròn bàng tiếp*** *tam giác.*

*Với một tam giác, có ba đường tròn bàng tiếp.*

*Tâm của đường tròn bàng tiếp tam giác trong góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B và C, hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C).*

**BÀI TẬP:**

1. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. a) Chứng minh rằng bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn (gọi tâm của nó là O). b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ME là tiếp tuyến của đường tròn (O).

*HD:*

*a) D, E nằm trên đường tròn đường kính AH.*

*b) Chứng minh =>.*

1. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB. Vẽ dây AC sao cho . Trên tia đối của tia BA, lấy điểm M sao cho BM = R. Chứng minh rằng: a) MC là tiếp tuyến của đường tròn (O). b) .

*HD: a) Chứng minh COM vuông tại C. b) .*

1. Cho tam giác ABC vuông ở A có AB = 8, AC = 15. Vẽ đường cao AH. Gọi D là điểm đối xứng với B qua H. Vẽ đường tròn đường kính CD, cắt AC ở E. a) Chứng minh rằng HE là tiếp tuyến của đường tròn. b) Tính độ dài HE.

*HD: a) Gọi O và F là lần lượt là trung điểm của CD và AE. Chứng minh DE // AB, HF AE =>. b) .*

1. Từ một điểm M ở ngoài đường tròn (O), vẽ hai tiếp tuyến MA, MB với đường tròn. Trên tia OB lấy điểm C sao cho BC = BO. Chứng minh rằng .

*HD: Chú ý OMC cân tại M.*

1. Cho đường tròn (O; R) và một điểm A ở ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC. Chứng minh rằng khi và chỉ khi .

*HD: Chú ý ABO vuông tại B.*

1. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O; R), vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt AC tại N. Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt AB tại M. a) Chứng minh rằng tứ giác AMON là hình thoi. b) Điểm A phải cách điểm O một khoảng bao nhiêu để cho MN là tiếp tuyến của (O).

*HD: a) Chứng minh ON // AB, OM // AC. b) .*

1. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Các tiếp tuyến của đường tròn vẽ từ A và C cắt nhau tại M. Trên tia AM lấy điểm D sao cho AD = BC. Chứng minh rằng: a) Tứ giác ABCD là hình bình hành. b) Ba đường thẳng AC, BD, OM đồng quy.

*HD: a) Chứng minh AD // BC (cùng vuông góc với OA).*

*b) Gọi E là giao điểm của OM và AC E là trung điểm của AC.*

1. Cho đường tròn (O; *r*) nội tiếp tam giác ABC vuông tại A. Chứng minh rằng , trong đó *p* là nửa chu vi tam giác, *a* là độ dài cạnh huyền.

*HD: Gọi D, E, F là các tiếp điểm của (O) với các cạnh tam giác AEOF là hình vuông.*

1. Chứng minh rằng diện tích tam giác ngoại tiếp một đường tròn được tính theo công thức: , trong đó *p* là nửa chu vi tam giác, *r* là bán kính đường tròn nội tiếp.

*HD: Diện tích tam giác bằng tổng diện tích ba tam giác nhỏ.*

1. Cho đường tròn (O), dây cung CD. Qua O vẽ OH ⊥ CD tại H, cắt tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) tại M. Chứng minh MD là tiếp tuyến của (O).

*HD:*

*Xét MCO và MDO: MO chung, OC=OD=R;*

*nên MCO=MDO (c.g.c) nên nên MD là tiếp tuyến (O).*

1. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Vẽ các tia A*x* ⊥ AB và B*y* ⊥ AB ở cùng phía nửa đường tròn. Gọi I là một điểm trên nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại I cắt A*x* tại C và B*y* tại D. Chứng minh rằng AC + BD = CD.

*HD:*

*Ta có: CI=AC; ID=DB nên AC+BC=CD*

1. Cho đường tròn (O; 5cm). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến MA và MB sao cho MA ⊥ MB tại M. a) Tính MA và MB. b) Qua trung điểm I của cung nhỏ AB, vẽ một tiếp tuyến cắt OA, OB tại C và D. Tính CD.

*HD:*

*a, OAMB là hình vuông*

*b, mà MO vuông góc DC nên OIC vuông cân tại C suy ra IC=IO=R hay CD=2R=10cm.*

1. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), vẽ hai tiếp tuyến MA và MB sao cho góc . Biết chu vi tam giác MAB là 18cm, tính độ dài dây AB.

*HD: .*

IV. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG TRÒN

**1. Tính chất đường nối tâm**

*Đường nối tâm của hai đường tròn là trục đối xứng của hình gồm cả hai đường tròn đó.*

*Nếu hai đường tròn cắt nhau thi hai giao điểm đối xứng với nhau qua đường nối tâm.*

*Nếu hai đường tròn tiếp xúc nhau thì tiếp điểm nằm trên đường nối tâm.*

**2. Vị trí tương đối của hai đường tròn**

*Cho hai đường tròn (O; R) và (O; r). Đặt .*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| VTTĐ của hai đường tròn | Số điểm chung | Hệ thức giữa *d* với R và *r* |
| Hai đường tròn cắt nhau | 2 |  |
| Hai đường tròn tiếp xúc nhau:  – Tiếp xúc ngoài  – Tiếp xúc trong | 1 |  |
| Hai đường tròn không giao nhau:  – Ở ngoài nhau  – (O) đựng (O) | 0 |  |

**3. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn**

***Tiếp tuyến chung*** *của hai đường tròn là đường thẳng tiếp xúc với cả hai đường tròn đó.*

***Tiếp tuyến chung******ngoài*** *là tiếp tuyến chung không cắt đoạn nối tâm.*

***Tiếp tuyến chung******trong*** *là tiếp tuyến chung cắt đoạn nối tâm.*

**BÀI TẬP:**

1. Cho hai đường tròn (A; R1), (B; R2) và (C; R3) đôi một tiếp xúc ngoài nhau. Tính R1, R2 và R3 biết AB = 5cm, AC = 6cm và BC =7cm.

*HD: , , .*

1. Cho hai đường tròn (O; 5cm) và (O; 5cm) cắt nhau tại A và B. Tính độ dài dây cung chung AB biết OO = 8cm.

*HD: .*

1. Cho hai đường tròn (O; R) và (O; R) cắt nhau tại A và B với R > R. Vẽ các đường kính AOC và AOD. Chứng minh rằng ba điểm B, C, D thẳng hàng.

*HD: Chứng minh BC, BD cùng song song với OO hoặc chứng minh .*

1. Cho hai đường tròn (O) và (O) cắt nhau tại A và B. Vẽ cát tuyến chung MAN sao cho MA = AN. Đường vuông góc với MN tại A cắt OO tại I. Chứng minh I là trung điểm của OO.

*HD: Kẻ OH và O’P vuông góc với NM, suy ra MH=HA=AP=PN suy ra AI là đường trung bình của hình thang HPO’O nên I là trung điểm OO’.*

1. Cho hai đường tròn (O) và (O) tiếp xúc ngoài nhau tại A. Gọi M là giao điểm một trong hai tiếp tuyến chung ngoài BC và tiếp tuyến chung trong. Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO tại M.

*HD: Ta có AM=MB=MC nên M là trung điểm BC, Từ M kẻ vuông góc với BC cắt OO’ tại I thì I là trung điểm OO’ ( tính chất đường trung bình của hình thang)*

*Ta có: nên nên MI là đường trung tuyến của tam giác vuông OMO’ suy ra MI=IO=IO’. Vậy IM vuông BC và IM=OO’:2 nên BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính OO’ tại M.*

1. Cho hai đường tròn (O; R) và (O; R) tiếp xúc ngoài nhau tại M. Hai đường tròn (O) và (O) cùng tiếp xúc trong với đường tròn lớn (O; R) lần lượt tại E và F. Tính bán kính R biết chu vi tam giác OOO là 20cm.

*HD:*

*Vì (O) và (O’) tiếp xúc ngoài nên OO’=R+R’.(1)*

*Vì (O) và (O’’) tiếp xúc trong nên OO’’=R’’-R. (2)*

*Vì (O’) và (O’’) tiếp xúc trong nên O’O’’=R’’-R’ (3).*

*Từ (1)(2)(3) suy ra Chu vi tam giác OO’O’’=2R’’=20cm nên R’’=10cm.*

1. Cho đường tròn (O; 9cm). Vẽ 6 đường tròn bằng nhau bán kính R đều tiếp xúc trong với (O) và mỗi đường tròn đều tiếp xúc với hai đường khác bên cạnh nó. Tính bán kính R.

*HD:*

*Gọi tâm của sáu đường tròn nhỏ là A,B,C,D,E,F. Suy ra ABCDEF là lục giác đều và ABO là tam giác đều nên AB=OB=9-R hay 2R=9-R ( vì AB=2R) suy ra R=3cm.*

1. Cho hai đường tròn đồng tâm. Trong đường tròn lớn vẽ hai dây bằng nhau AB = CD và cùng tiếp xúc với đường tròn nhỏ tại M và N sao cho AB ⊥ CD tại I. Tính bán kính đường tròn nhỏ biết IA = 3cm và IB = 9cm.

*HD: Từ O kẻ OH vuông góc AB, OP vuông góc CD, suy ra HB=HA=6cm, mà IA=3cm nên IH=3cm.*

*Kẻ OP vuông góc với CD thì IPOH là hình vuông, suy ra OP=R=IH=3cm. Vậy R=3cm.*

1. Cho ba đường tròn  cùng có bán kính R và tiếp xúc ngoài nhau từng đôi một. Tính diện tích tam giác có ba đỉnh là ba tiếp điểm.

*HD: Tam giác đều cạnh R .*

1. Cho hai đường tròn (O) và (O) tiếp xúc nhau tại A. Qua A vẽ một cát tuyến cắt đường tròn (O) tại B và cắt đường tròn (O) tại C. Từ B vẽ tiếp tuyến *xy* với đường tròn (O). Từ C vẽ đường thẳng *uv* song song với *xy*. Chứng minh rằng *uv* là tiếp tuyến của đường tròn (O).

*HD: Xét hai trường hợp tiếp xúc ngoài và trong. Chứng minh OB // OC OC uv.*

1. Cho hình vuông ABCD. Vẽ đường tròn (D; DC) và đường tròn (O) đường kính BC, chúng cắt nhau tại một điểm thứ hai là E. Tia CE cắt AB tại M, tia BE cắt AD tại N. Chứng minh rằng: a) N là trung điểm của AD. b) M là trung điểm của AB.

*HD:*

*a) ABN = CDO AN = CO b) BCM = CDO BM = CO.*

1. Cho góc vuông *x*O*y*. Lấy các điểm I và K lần lượt trên các tia O*x* và O*y*. Vẽ đường tròn (I; OK) cắt tia O*x* tại M (I nằm giữa O và M). Vẽ đường tròn (K; OI) cắt tia O*y* tại N (K nằm giữa O và N). a) Chứng minh hai đường tròn (I) và (K) luôn cắt nhau. b) Tiếp tuyến tại M của đường tròn (I) và tiếp tuyến tại N của đường tròn (K) cắt nhau tại C. Chứng minh tứ giác OMCN là hình vuông. c) Gọi giao điểm của hai đường tròn (I), (K) là A và B. Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng. d) Giả sử I và K theo thứ tự di động trên các tia O*x* và O*y* sao cho OI + OK = *a* (không đổi). Chứng minh rằng đường thẳng AB luôn đi qua một điểm cố định.

*HD: a) Xét OIK  b) .*

*c) Gọi . OKBI là hình chữ nhật, BLMI là hình vuông. BLP = KOI LP = OI MP = OM = MC P C.*

*d) OM = a. Hình vuông OMCN cạnh a, cố định AB đi qua điểm C cố định.*

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG II

1. Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Vẽ đường phân giác BI. a) Chứng minh rằng đường tròn (I; IA) tiếp xúc với BC. b) Cho biết AB = *a*. Chứng minh rằng . Từ đó suy ra .

*HD: a) Vẽ ID BC IA = ID*

*b) Xét ABI . DIC vuông cân AI = DC = .*

1. Cho đường tròn (O; R) và một điểm A cố định trên đường tròn đó. Qua A vẽ tiếp tuyến *xy*. Từ một điểm M trên *xy* vẽ tiếp tuyến MB với đường tròn (O). Hai đường cao AD và BE của tam giác MAB cắt nhau tại H. a) Chứng minh rằng ba điểm M, H, O thẳng hàng. b) Chứng minh rằng tứ giác AOBH là hình thoi. c) Khi điểm M di động trên *xy* thì điểm H di động trên đường nào?

*HD: a) Chứng minh MAB cân, MH, MO là các tia phân giác của .*

*b) Chứng minh AOBH là hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau.*

*c) H di động trên đường tròn (A; R).*

1. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Từ một điểm M trên nửa đường tròn ta vẽ tiếp tuyến *xy*. Vẽ AD và BC vuông góc với *xy*. a) Chứng minh rằng MC = MD. b) Chứng minh rằng AD + BC có giá trị không đổi khi điểm M di động trên nửa đường tròn. c) Chứng minh rằng đường tròn đường kính CD tiếp xúc với ba đường thẳng AD, BC và AB. d) Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn (O) để cho diện tích tứ giác ABCD lớn nhất.

*HD: a) OM là đường trung bình của hình thang ABCD.*

*b) AD + BC = 2R c) Vẽ ME AB. BME = BMC ME = MC = MD*

*d) S = 2R.ME ≤ 2R.MO S lớn nhất M là đầu mút của bán kính OM AB.*

1. Cho tam giác đều ABC, O là trung điểm của BC. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy các điểm di động D, E sao cho . a) Chứng minh rằng tích BD.CE không đổi. b) Chứng minh BOD ∽ OED. Từ đó suy ra tia DO là tia phân giác của góc BDE. c) Vẽ đường tròn tâm O tiếp xúc với AB. Chứng minh rằng đường tròn này luôn tiếp xúc với DE.

*HD: a) BOD ∽ CEO BD.CE =  b)  BOD ∽ OED*

*c) Vẽ OK DE. Gọi H là tiếp điểm của (O) với cạnh AB. Chứng minh OK = OH.*

1. Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB và một điểm E di động trên nửa đường tròn đó (E không trùng với A và B). Vẽ các tia tiếp tuyến A*x*, B*y* với nửa đường tròn. Tia AE cắt B*y* tại C, tia BE cắt A*x* tại D. a) Chứng minh rằng tích AD.BC không đổi. b) Tiếp tuyến tại E của nửa đường tròn cắt A*x*, B*y* theo thứ tự tại M và N. Chứng minh rằng ba đường thẳng MN, AB, CD đồng quy hoặc song song với nhau. c) Xác định vị trí của điểm E trên nửa đường tròn để diện tích tứ giác ABCD nhỏ nhất. Tính diện tích nhỏ nhất đó.

*HD: a) ABD ∽ BCA *

*b) MAE cân MDE cân MD = ME = MA. Tương tự NC = NB = NE. Sử dụng bổ đề hình thang đpcm.*

*c) S = 2R.MN S nhỏ nhất MN nhỏ nhất MN AD OE AB. .*

1. Cho đoạn thẳng AB cố định. Vẽ đường tròn (O) tiếp xúc với AB tại A, đường tròn (O) tiếp xúc với AB tại B. Hai đường tròn này luôn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB và luôn tiếp xúc ngoài với nhau. Hỏi tiếp điểm M của hai đường tròn di động trên đường nào?

*HD: Từ M vẽ tiếp tuyến chung của hai đường tròn, cắt AB tại I. Chứng minh IA = IB = IM. Từ đó suy ra M di động trên đường tròn tâm I đường kính AB.*

1. Cho đường tròn (O; R) nội tiếp ABC. Gọi M, N, P lần lượt là tiếp điểm của AB, AC, BC với (O). Chứng minh rằng: .

*HD:*

*( Chú ý: AMO=ANO (ch-gn) nên AM=AN)*

1. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Dây CD cắt đường kính AB tại I. Gọi H và K lần lượt là chân các đường vuông góc kẻ từ A và B đến CD. Chứng minh CH = DK.

*HD: Vẽ EH CD. Chứng minh EH = EK CH = DK.*

1. Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là tiếp điểm). Cho biết góc . a) Tính góc . b) Từ O kẽ đường thẳng vuông góc với OA cắt MB tại N. Chứng minh tam giác OMN là tam giác cân.

*HD: a)*  *b) Chứng minh*

1. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Vẽ các tiếp tuyến A*x*, B*y* với nửa đường tròn cùng phía đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn (M khác A, B) vẽ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt A*x* và B*y* lần lượt tại C và D. a) Chứng minh: Tam giác COD là tam giác vuông. b) Chứng minh: MC.MD = OM2. c) Cho biết OC = BA = 2R, tính AC và BD theo R.

*HD: a) OC OD c) , .*

1. Cho hai đường tròn (O) và (O) tiếp xúc ngoài với nhau tại B. Vẽ đường kính AB của đường tròn (O) và đường kính BC của đường tròn (O). Đường tròn đường kính OC cắt (O) tại M và N. a) Đường thẳng CM cắt (O) tại P. Chúng minh: OM // BP. b) Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với CM cắt tia ON tại D. Chứng minh tam giác OCD là tam giác cân.

*HD: a) OM MC, BP MC b) CD // OM; OCD cân tại D.*

1. Cho hai đường tròn (O; R) và (O; R) cắt nhau tại A và B sao cho đường thẳng OA là tiếp tuyến của đường tròn (O; R/). Biết R = 12cm, R = 5cm. a) Chứng minh: OA là tiếp tuyến của đường tròn (O; R). b) Tính độ dài các đoạn thẳng OO, AB.

*HD: a) OA OA b) ; .*

1. Cho đường tròn tâm O bán kính R = 6cm và một điểm A cách O một khoảng 10cm. Từ A vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm). a) Tính độ dài đoạn tiếp tuyến AB. b) Vẽ cát tuyến ACD, gọi I là trung điểm của đoạn CD. Hỏi khi C chạy trên đường tròn (O) thì I chạy trên đường nào ?

*HD:*

*a, AB2=OA2-OB2*

*b, Vì O, A cố định mà nên khi C thay đổi thì I chạy trên đường tròn đường kính AO.*

1. Cho hai đường tròn đồng tâm (O; R) và (O; r). Dây AB của (O; R) tiếp xúc với (O; r). Trên tia AB lấy điểm E sao cho B là trung điểm của đoạn AE. Từ E vẽ tiếp tuyến thứ hai của (O; r) cắt (O; R) tại C và D (D ở giữa E và C). a) Chứng minh: EA = EC. b) Chứng minh: EO vuông góc với BD. c) Điểm E chạy trên đường nào khi dây AB của (O; R) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với (O; r)?

*HD:*

*a, Gọi hai tiếp điểm là M và N ( M thuộc AB). Ta có: ME=EN ( tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau); MA=MB; NC=ND; MB=ND nên AE=EC.*

*b, Vì EMN cân mà MB=ND nên DB//NM. Ta có EO vuông góc NM nên EO vuông góc DB.*

*c, Đặt AB=x, suy ra ME= . suy ra OE=. không đổi. Vậy khi dây AB thay đổi thì E chạy trên đường tròn tâm O đường kính OE.*

1. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và một điểm M nằm trên nửa đường tròn đó. H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB. a) Khi AH = 2cm, MH = 4cm, hãy tính độ dài các đoạn thẳng AB, MA, MB. b) Khi điểm M di động trên nửa đường tròn (O). Hãy xác định vị trí của M để biểu thức:  có giá trị nhỏ nhất. c) Tiếp tuyến của (O) tại M cắt tiếp tuyến của (O) tại A ở D, OD cắt AM tại I. Khi điểm M di động trên nửa đường tròn (O) thì I chạy trên đường nào ?

*HD:*

*a,AHM vuông tại H, Pytago tính được AM= cm, AMB vuông tại M nên AM2=AH.AB*

*suy ra AB=10cm, MB= CM,*

*b, nhỏ nhất khi MH lớn nhất => M nằm ở trung điểm cung AB.*

*c, Vì nên I chạy trên nửa đường tròn đường kính AO.*

1. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD. Gọi H là trực tâm của tam giác. a) Tính số đo góc ? b) Tứ giác BHCD là hình gì? Vì sao? c) Gọi M là trung điểm BC . Chứng minh 2OM = AH.

*HD: a) b) BHCD là hình bình hành.*

1. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt đường tròn (O) ở D. a) AD có phải là đường kính của đường tròn (O) không ? Vì sao? b) Chứng minh: BC2 = 4AH.DH. c) Cho BC = 24cm, AB = 20cm. Tính bán kính của đường tròn (O).

*HD:*

*a, Có vì AH vuông BC tại trung điểm H, OH vuông BC nên A,O, H thẳng hàng.*

*b, ABD vuông tại B nên AH.BD=BH2 hay 4AH.BD=4BH2=BC2 đpcm.*

*c, Ta có: . Từ đó tính được BD.*

*Mà AD2=DB2+AB2 suy ra AD và R=AD:2.*

1. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi H là trung điểm OA. Dây CD vuông góc với OA tại H. a) Tứ giác ACOD là hình gì? Vì sao? b) Chứng minh các tam giác OAC và CBD là các tam giác đều. c) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh ba điểm D,O, M thẳng hàng. d) Chứng minh: CD2 = 4 AH. HB.

*HD: a) ACOD là hình thoi.*

1. Cho đường tròn đường kính 10 cm, một đường thẳng d cách tâm O một khoảng bằng 3 cm. a) Xác định vị trí tương đối của đường thẳng d và đường tròn (O). b) Đường thẳng d cắt đường tròn (O) tại điểm A và B. Tính độ dài dây AB. c) Kẻ đường kính AC của đường tròn (O). Tính độ dài BC và số đo góc CAB (làm tròn đến độ). d) Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt tia AB tại M. Tính độ dài BM.

*HD:*

*a, R=5cm>d=3cm nên đường thẳng d cắt (O).*

*b, Kẻ OH vuông AB, OH=3cm, AO2+OH2=AH2 => AH=4cm => AB=8cm.*

*c, ACB có OH là đường trung bình nên BC=2OH=6cm.*

*sin=CB:AC suy ra .*

*d, CB2=AB.BM*

1. Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt AB ở N và cắt AC ở M. Gọi H là giao điểm của BM và CN. a) Tính số đo các góc BMC và BNC. b) Chứng minh AH vuông góc BC. c) Chứng minh tiếp tuyến tại N đi qua trung điểm AH.

*HD: a ) b) H là trực tâm ABC*

*c) NK NO (K là trung điểm của AH).*

1. Cho đường tròn tâm (O; R) đường kính AB và điểm M trên đường tròn sao cho góc . Kẻ dây MN vuông góc với AB tại H. a) Chứng minh AM và AN là các tiếp tuyến của đường tròn (B; BM). b) Chứng minh MN2 = 4AH.HB . c) Chứng minh BMN là tam giác đều và điểm O là trọng tâm của nó. d) Tia MO cắt đường tròn (O) tại E, tia MB cắt (B) tại F. Chứng minh ba điểm N, E, F thẳng hàng.

*HD:*

*a, AM vuông BM và AN vuông BN.*

*b, 4AH.BH=4MH2=NM2.*

*c, BMN cân có nên BMN đều.*

*d, OH là đường trung bình của MEN nên OH//EN.*

*BO là đường trung bình của MFE nên BO//FE. Suy ra F,E,N thẳng hàng.*

1. Cho đường tròn (O; R) và điểm A cách O một khoảng bằng 2R, kẻ tiếp tuyến AB tới đường tròn (B là tiếp điểm). a) Tính số đo các góc của tam giác OAB. b) Gọi C là điểm đối xứng với B qua OA. Chứng minh điểm C nằm trên đường tròn O và AC là tiếp tuyến của đường tròn (O). c) AO cắt đường tròn (O) tại G. Chứng minh G là trọng tâm tam giác ABC.

*HD: a) , , .*

1. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O; R) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC. a) Chứng minh OA  BC và tính tích OH.OA theo R b) Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Chứng minh CD // OA. c) Gọi E là hình chiếu của C trên BD, K là giao điểm của AD và CE. Chứng minh K là trung điểm CE.

*HD:*

*a, ABO vuông tại B nên OA.OH=OB2=R2.*

*b, OH là đường trung bình của BDC nên OH//DC hay OA//DC.*

*c, HK//BE mà H là trung điểm BC nên K là trung điểm EC.*

1. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O; R) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ BE  AC và CF  AB (), BE và CF cắt nhau tại H. a) Chứng minh tứ giác BOCH là hình thoi. b) Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng. c) Xác định vị trí điểm A để H nằm trên đường tròn (O).

*HD: a) BOCH là hình bình hành và OB = OC*

*b) H là trực tâm ABC c) OA = 2R*

1. Cho đường tròn (O; 3cm) và điểm A có OA = 6 cm. Kẻ các tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC. a) Tính độ dài OH. b) Qua điểm M bất kì thuộc cung nhỏ BC, kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt AB và AC theo thứ tự tại D và E. Tính chu vi tam giác ADE. c) Tính số đo góc .

*HD: a)  b) , *

*c) .*

1. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi A*x* , B*y* là các tia vuông góc với AB (A*x*, B*y* và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M bất kì thuộc tia A*x* kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt B*y* ở N. a) Tính số đo góc MON. b) Chứng minh MN = AM + BN. c) Tính tích AM. BN theo R.

*HD:*

*a, Gọi E là tiếp điểm tiếp tuyến kẻ từ M. Ta có: MO vuông AE; ON vuông EB; nên*

*b, Ta có: ME=MA; EN=NB nên NM=MA+NB.*

*c, AM.BN=ME.EN=OE2=R2*

1. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của điểm H trên các cạnh AB và AC. a) Chứng minh AD.AB = AE.AC. b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BH và CH. Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (M; MD) và (N; NE). c) Gọi P là trung điểm MN, Q là giao điểm của DE và AH . Giả sử AB = 6 cm,AC = 8 cm . Tính độ dài PQ.

*HD:*

1. Cho hai đường tròn (O) và (O) tiếp xúc ngoài tại A. Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với M thuộc (O) và N thuộc (O). Gọi P là điểm đối xứng với M qua OO, Q là điểm đối xứng với N qua OO. Chứng minh rằng: a) MNQP là hình thang cân. b) PQ là tiếp tuyến chung của của hai đường tròn (O) và (O). c) MN + PQ = MP + NQ.

*HD:*

CHƯƠNG III

GÓC VỚI ĐƯỜNG TRÒN

I. GÓC Ở TÂM. SỐ ĐO CUNG

**1. Góc ở tâm**

*Góc có đỉnh trùng với tâm đường tròn là* ***góc ở tâm****.*

*Nếu  thì cung nằm bên trong góc là* ***cung nhỏ****, cung nằm bên ngoài góc là* ***cung lớn****.*

*Nếu  thì mỗi cung là một nửa đường tròn.*

*Cung nằm bên trong góc là* ***cung bị chắn****. Góc bẹt* ***chắn******nửa đường tròn****.*

*Ki hiệu cung AB là .*

**2. Số đo cung**

*Số đo của cung AB được kí hiệu là sđ.*

*Số đo của cung nhỏ bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.*

*Số đo của cung lớn bằng* ***hiệu*** *giữa  và số đo của cung nhỏ (có chung 2 mút với cung lớn).*

*Số đo của nửa đường tròn bằng . Cung cả đường tròn có số đo .*

*Cung không có số đo (cung có 2 mút trùng nhau).*

**3. So sánh hai cung**

*Trong một đường tròn hay hai đường tròn bằng nhau:*

*Hai cung là bằng nhau nếu chúng có số đo bằng nhau.*

*Trong hai cung, cung nào có số đo lớn hơn là cung lớn hơn.*

**4. Định lí**

*Nếu C là một điểm nằm trên cung AB thì sđ = sđ + sđ.*

**BÀI TẬP:**

1. Cho đường tròn (O; R). Vẽ dây . Tính số đo của hai cung AB.

*HD: .*

1. Cho đường tròn (O; R). Vẽ dây AB sao cho số đo của cung nhỏ AB bằng  số đo của cung lớn AB. Tính diện tích của tam giác AOB.

*HD: .*

1. Cho hai đường tròn đồng tâm (O; R) và . Trên đường tròn nhỏ lấy một điểm M. Tiếp tuyến tại M của đường tròn nhỏ cắt đường tròn lớn tại A và B. Tia OM cắt đường tròn lớn tại C. a) Chứng minh rằng cung CA=CB. b) Tính số đo của hai cung AB.

*HD: b) .*

1. Cho (O; 5cm) và điểm M sao cho OM = 10cm. Vẽ hai tiếp tuyến MA và MB. Tính góc ở tâm do hai tia OA và OB tạo ra.

*HD: .*

1. Cho tam giác đều ABC, vẽ nửa đường tròn đường kính BC cắt AB tại D và AC tại E. So sánh các cung BD, DE và EC.

*HD: BD=DE=EC.*

1. Cho hai đường tròn đồng tâm (O; R) và (O; R) với R > R. Qua điểm M ở ngoài (O; R), vẽ hai tiếp tuyến với (O; R). Một tiếp tuyến cắt (O; R) tại A và B (A nằm giữa M và B); một tiếp tuyến cắt (O; R) tại C và D (C nằm giữa D và M). Chứng minh hai cung AB và CD bằng nhau.

*HD:*

II. LIÊN HỆ GIỮA CUNG VÀ DÂY

**1. Định lí 1**

*Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:*

*a) Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau.*

*b) Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau.*

**2. Định lí 2**

*Với hai cung nhỏ trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:*

*a) Cung lớn hơn căng dây lớn hơn.*

*b) Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.*

**3. Bổ sung**

*a) Trong một đường tròn, hai cung bị chắn giữa hai dây song song thì bằng nhau.*

*b) Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì đi qua trung điểm của dây căng cung ấy.*

*Trong một đường tròn, đường kính đi qua trung điểm của một dây (không đi qua tâm) thì đi qua điểm chính giữa của cung bị căng bởi dây ấy.*

*c) Trong một đường tròn, đường kính đi qua điểm chính giữa của một cung thì vuông góc với dây căng cung ấy và ngược lại.*

**BÀI TẬP:**

1. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn (O). Biết , hãy so sánh các cung nhỏ AB, AC và BC.

*HD: => AB=AC>BC.*

1. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O) cắt nhau tại hai điểm A, B. Vẽ các đường kính AOE, AOF và BOC. Đường thẳng AF cắt đường tròn (O) tại một điểm thứ hai là D. Chứng minh rằng các cung nhỏ AB, CD, CE bằng nhau.

*HD: Chứng minh E, B, F thẳng hàng; BC // AD.*

1. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Vẽ hai dây AM và BN song song với nhau sao cho sđ. Vẽ dây MD song song với AB. Dây DN cắt AB tại E. Từ E vẽ một đường thẳng song song với AM cắt đường thẳng DM tại C. Chứng minh rằng: a) AB DN b) BC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

*HD:*

1. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Từ A và B vẽ hai dây cung AC và BD song song với nhau. Qua O vẽ đường thẳng vuông góc AC tại M và BD tại N. So sánh hai cung AC và BD.

*HD:*

1. Cho đường tròn (O) và dây AB chia đường tròn thành hai cung thỏa mãn cung AmB=1/3.AnB. a) Tính số đo của hai cung AmB và AnB. b) Chứng minh khoảng cách từ tâm O đến dây AB là .

*HD:*

1. Trên đường tròn (O) vẽ hai cung AB và CD thỏa mãn: cung AB=2CD. Chứng minh: AB < 2.CD.

*HD:*

III. GÓC NỘI TIẾP

**1. Định nghĩa**

***Góc nội tiếp*** *là góc có đỉnh nằm trên đường tròn và hai cạnh chứa hai dây cung của đường tròn đó.*

*Cung nằm bên trong góc là* ***cung bị chắn****.*

### 2. Định lí

*Trong một đường tròn, số đo của góc nội tiếp bằng nửa số đo của cung bị chắn.*

**3. Hệ quả**

*Trong một đường tròn:*

*a) Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau.*

*b) Các góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau.*

*c) Góc nội tiếp (nhỏ hơn hoặc bằng ) có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.*

*d) Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông.*

**BÀI TẬP:**

1. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và dây AC căng cung AC có số đo bằng . a) So sánh các góc của tam giác ABC. b) Gọi M, N lần lượt là điểm chính giữa của các cung AC và BC. Hai dây AN và BM cắt nhau tại I. Chứng minh rằng tia CI là tia phân giác của góc ACB.

*HD:*

*a) =300; =600; =900*

*b) Chứng minh các tia AN, BM là các tia phân giác của các góc A và B.*

1. Cho tam giác ABC cân tại A (*<900*). Vẽ đường tròn đường kính AB cắt BC tại D, cắt AC tại E. Chứng minh rằng: a) Tam giác DBE cân. b) .

*HD: a) Cung DB=DE => DB=DE. b)* .

1. Cho tam giác ABC (AB < AC) nội tiếp trong đường tròn (O). Vẽ đường kính MN BC (điểm M thuộc cung BC không chứa A). Chứng minh rằng các tia AM, AN lần lượt là các tia phân giác trong và ngoài tại đỉnh A của tam giác ABC.

*HD: MN BC => Cung MB=MC.*

1. Cho đường tròn (O) và hai dây MA, MB vuông góc với nhau. Gọi I, K lần lượt là điểm chính giữa của các cung nhỏ MA và MB. Gọi P là giao điểm của AK và BI. a) Chứng minh rằng ba điểm A, O, B thẳng hàng. b) Chứng minh rằng P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MAB. c\*) Giả sử MA = 12 cm, MB = 16 cm, tính bán kính của đường tròn nội tiếp tam giác MAB.

*HD: a) b) AK, BI là các đường phân giác của MAB*

*c) AB = 20 cm. Chứng minh  .*

1. Cho đường tròn (O) đường kính AB và một điểm C di động trên một nửa đường tròn đó. Vẽ đường tròn tâm I tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đường kính AB tại D, đường tròn này cắt CA và CB lần lượt tại các điểm thứ hai là M và N. Chứng minh rằng: a) Ba điểm M, I, N thẳng hàng. b) ID MN. c) Đường thẳng CD đi qua một điểm cố định, từ đó suy ra cách dựng đường tròn (I) nói trên.

*HD: a) MN là đường kính.*

*b) Chứng minh O, I, C thẳng hàng; MN // AB; ID AB.*

*c) Gọi E là giao điểm của đường thẳng CD với (O) Cung EA=EB E cố định.*

1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O), hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Vẽ đường kính AF. a) Tứ giác BFCH là hình gì? b) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh rằng ba điểm H, M, F thẳng hàng. c) Chứng minh rằng .

*HD: a) Chứng minh CE // BF, BD // CF BFCH là hình bình hành.*

*b) Dùng tính chất hai đường chéo của hình bình hành.*

*c) Dùng tính chất đường trung bình của tam giác AHF.*

1. Cho đường tròn (O) đường kính AB, M là điểm chính giữa của một nửa đường tròn, C là điểm bất kì trên nửa đường tròn kia, CM cắt AB tại D. Vẽ dây AE vuông góc với CM tại F. a) Chứng minh rằng tứ giác ACEM là hình thang cân. b) Vẽ CH AB. Chứng minh rằng tia CM là tia phân giác của góc . c) Chứng minh rằng .

*HD: a) Chứng minh FAC và FEM vuông cân tại F AE = CM;*

*AC // ME ACEM là hình thang cân.*

*b)*

*c) HDC ∽ ODM  CD ≤ MD .*

1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Biết . Tính độ dài BC.

*HD: Vẽ đường kính BD. . .*

1. Cho đường tròn (O) có hai bán kính OA và OB vuông góc. Lấy điểm C trên đường tròn (O) sao cho . Tính các góc của tam giác ABC.

*HD:*

1. Cho tam giác ABC cân tại A và có góc A bằng . Nửa đường tròn đường kính AC cắt AB tại D và BC tại H. Tính số đo các cung AD, DH và HC.

*HD:*

1. Cho đường tròn (O) có đường kính AB vuông góc dây cung CD tại E. Chứng minh rằng: .

*HD:*

IV. GÓC TẠO BỞI TIA TIẾP TUYẾN VÀ DÂY CUNG

**1. Định lí**

*Số đo của góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung bằng nửa số đo của cung bị chắn.*

**2. Hệ quả**

*Trong một đường tròn, góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.*

**3. Định lí** (bổ sung)

Nếu góc BAx (với đỉnh A nằm trên đường tròn, một cạnh chứa dây cung AB), có số đo bằng nửa số đo của cung AB căng dây đó và cung này nằm bên trong góc đó thì cạnh Ax là một tia tiếp tuyến của đường tròn.

**BÀI TẬP:**

1. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Trên tia đối của tia AB lấy một điểm M. Vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn. Gọi H là hình chiếu của C trên AB. a) Chứng minh rằng tia CA là tia phân giác của góc MCH. b) Giả sử MA = *a*, MC = 2*a*. Tính AB và CH theo *a*.

*HD: a)*

*b) Chứng minh  , . MC.OC = CH.OM .*

1. Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (O). Gọi D, E, F lần lượt là các tiếp điểm của đường tròn trên các cạnh AB, BC, CA. Gọi M, N, P lần lượt là các giao điểm của đường tròn (O) với các ti OA, OB, OC. Chứng minh rằng các điểm M, N, P lần lượt là tâm của đường tròn nội tiếp các tam giác ADF, BDE và CEF.

*HD: Áp dụng tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau.*

1. Cho hai đường tròn (O) và (O) cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng tiếp xúc với đường tròn (O) tại C và tiếp xúc với đường tròn (O) tại D. Vẽ đường tròn (I) qua ba điểm A, C, D, cắt đường thẳng AB tại một điểm thứ hai là E. Chứng minh rằng: a) b) Tứ giác BCED là hình bình hành.

*HD: a) Chứng minh ,*

*b) Chứng minh , BC // DE, BD // CE.*

1. Trên một cạnh của góc lấy điểm T, trên cạnh kia lấy hai điểm A, B sao cho . Chứng minh rằng MT là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác TAB.

*HD: Chứng minh MAT ∽ MTB MT là tiếp tuyến.*

1. Cho hai đường tròn (O) và (O) cắt nhau tại A và B. Vẽ dây BC của đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (O). Vẽ dây BD của đường tròn (O) tiếp xúc với đường tròn (O). Chứng minh rằng: a)  b) .

*HD: a) ABC ∽ ADB đpcm. b)  .*

1. Cho đường tròn (O) và một điểm M ở bên ngoài đường tròn. Tia M*x* quay quanh M, cắt đường tròn tại A và B. Gọi I là một điểm thuộc tia m*x* sao cho . Hỏi điểm I di động trên đường nào?

*HD:*  *MI = MT Điểm I di động trên đường tròn (M, MT).*

1. Cho đường tròn (O) và ba điểm A, B, C trên (O). Dây cung CB kéo dài gặp tiếp tuyến tại A ở M. So sánh các góc ; .

*HD:*

1. Cho hai đường tròn (O, R) và (O, R) (R > R) tiếp xúc ngoài nhau tại A. Qua A kẽ hai cát tuyến BD và CE (B, C ∈ (O); D, E ∈ (O)). Chứng minh: .

*HD:*

1. Cho đường tròn (O, R) có hai đường kính AB và CD vuông góc. Gọi I là điểm trên cung AC sao cho khi vẽ tiếp tuyến qua I và cắt DC kéo dài tại M thì IC = CM. a) Tính góc AOI. b) Tính độ dài OM.

*HD:*

V. GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN TRONG ĐƯỜNG TRÒN.

GÓC CÓ ĐỈNH Ở BÊN NGOÀI ĐƯỜNG TRÒN.

**Định lí 1**

*Số đo của góc có đỉnh ở bên trong đường tròn bằng nửa tổng số đo hai cung bị chắn.*

### Định lí 2

*Số đo của góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn bằng nửa hiệu số đo hai cung bị chắn.*

**BÀI TẬP:**

1. Cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn (O). Trên các cung nhỏ AB và AC lần lượt lấy các điểm I và K sao cho AI=AK . Dây IK cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D và E. a) Chứng minh rằng . b) Tam giác ABC phải có thêm điều kiện gì thì tứ giác DECB là hình thang cân.

*HD: a) b) .*

1. Cho đường tròn (O) và một dây AB. Vẽ đường kính CD vuông góc với AB (D thuộc cung nhỏ AB). Trên cung nhỏ BC lấy một điểm N. Các đường thẳng CN và DN lần lượt cắt đường thẳng AB tại E và F. Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại N cắt đường thẳng AB tại I. Chứng minh rằng: a) Các tam giác INE và INF là các tam giác cân. b) .

*HD: a) = b)  đpcm.*

1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Các tia phân giác của góc B và góc C cắt nhau tại I và cắt đường tròn (O) lần lượt tại D và E. Dây DE cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng: a) Tam giác AMN là tam giác cân. b) Các tam giác EAI và DAI là những tam giác cân. c) Tứ giác AMIN là hình thoi.

*HD: a) Cung DA=DC; EA=EB; FB=FC*

*b) DA = DI c) Chứng minh NI // AM, MI // AN, AM = AN đpcm.*

1. Từ một điểm M ở bên ngoài đường tròn (O), ta vẽ hai tiếp tuyến MB, MC. Vẽ đường kính BD. Hai đường thẳng CD và MB cắt nhau tại A. Chứng minh rằng M là trung điểm của AB.

*HD: MA = MC = MB.*

1. Từ một điểm A ở bên ngoài đường tròn (O), ta vẽ hai cát tuyến ABC và ADE (B nằm giữa A và C; D nằm giữa A và E). Cho biết , sđBD=400. Chứng minh CD BE.

*HD => sđCE=1400. Gọi H = CD BE => .*

1. Cho 4 điểm A, B, C và D theo thứ tự trên đường tròn (O) sao cho số đo các cung như sau: sđAB=400, sđCD=1200. Gọi I là giao điểm của AC và BD. M là giao điểm của DA và CB kéo dài. Tính các góc CID và AMB.

*HD:*

1. Cho đường tròn (O). Từ một điểm M ở ngoài (O), ta vẽ các cát tuyến MAC và MBD sao cho . Gọi E là giao điểm của AD và BC. Biết góc , tính số đo các cung AB và CD.

*HD:*

1. Cho đường tròn (O) và một điểm M ở ngoài (O). Vẽ tiếp tuyến MA và cát tuyến MBC đi qua O (B nằm giữa M và C). Đường tròn đường kính MB cắt MA tại E. Chứng minh: sđAnC=sđBmA+sđBkE với AnC, BmA và BkE là các cung trong góc AMC.

VI. CUNG CHỨA GÓC

**1. Quỹ tích cung chứa góc**

*Với đoạn thẳng AB và góc () cho trước thì quỹ tích các điểm M thoả mãn  là hai cung chứa góc dựng trên đoạn AB.*

***Chú ý:***

*Hai cung chứa góc nói trên là hai cung tròn đối xứng nhau qua AB.*

*Hai điểm A, B được coi là thuộc quỹ tích.*

***Đặc biệt:*** *Quỹ tích các điểm M nhìn đoạn thẳng AB cho trước dưới một góc vuông là đường tròn đường kính AB.*

**2. Cách vẽ cung chứa góc**

*– Vẽ đường trung trực d của đoạn thẳng AB.*

*– Vẽ tia Ax tạo với AB một góc .*

*– Vẽ đường thẳng Ay vuông góc với Ax. Gọi O là giao điểm của Ay với d.*

*– Vẽ cung AmB, tâm O, bán kính OA sao cho cung này nằm ở nửa mặt phẳng bờ AB không chứa tia Ax.*

*Cung AmB được vẽ như trên là một cung chứa góc .*

**3. Cách giải bài toán quỹ tích**

Muốn chứng minh quỹ tích (tập hợp) các điểm M thoả mãn tính chất T là một hình H nào đó, ta phải chứng minh hai phần:

*–* ***Phần thuận:*** *Mọi điểm có tính chất T đều thuộc hình H.*

*–* ***Phần đảo:*** *Mọi điểm thuộc hình H đều có tính chất T.*

*– Kết luận: Quỹ tích các điểm M có tính chất T là hình H.*

**BÀI TẬP:**

1. Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Vẽ dây MN = R (điểm M ở trên cung AN). Hai dây AN và BM cắt nhau tại I. Hỏi khi dây MN di động thì điểm I di động trên đường nào?

*HD: Chứng minh MON đều I nằm trên cung chứa góc  dựng trên đoạn AB.*

1. Cho nửa đường tròn đường kính AB và một dây AC quay quanh A. Trên nửa mặt phẳng bờ AC không chứa B ta vẽ hình vuông ACDE. Hỏi: a) Điểm D di động trên đường nào? b) Điểm E di động trên đường nào?

*HD: a) D di động trên cung chứa góc  dựng trên đoạn AB (nằm trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa C).*

*b) Vẽ Ax AB. DE cắt Ax tại F EAF = CAB AF = AB AF cố định. E nằm trên đường tròn đường kính AF.*

1. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh BC lấy điểm E, trên tia đối của tia CD lấy điểm F sao cho CE = CF. Gọi M là giao điểm của hai đường thẳng DE và BF. Tìm quỹ tích của điểm M khi E di động trên cạnh BC.

*HD:*

***Phần thuận:*** *CBF = CDE M nằm trên đường tròn đường kính BD. Mặt khác E C thì M C, E B thì M B M thuộc cung nhỏ BC.*

***Phần đảo:*** *DM cắt BC tại E, BM cắt DC tại F. CBF = CDE CE = CF.*

*Kết luận: Quỹ tích của điểm M là cung nhỏ BC của đường tròn đường kính BD.*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ hai nửa đường tròn đường kính AB và AC ra phía ngoài tam giác. Qua A vẽ cát tuyến MAN (M thuộc nửa đường tròn đường kính AB, N thuộc nửa đường tròn đường kính AC). a) Tứ giác BMNC là hình gì? b) Tìm quỹ tích trung điểm I của MN khi cát tuyến MAN quay quanh A.

*HD:*

*a) BMNC là hình thang vuông*

*b) Gọi K là trung điểm của BC. Quỹ tích điểm I là cung DAE của đường tròn đường kính AK.*

1. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Gọi M là điểm chính giữa của cung AB. Trên cung AM lấy điểm N. Trên các tia AM, AN và BN lần lượt lấy các điểm C, D, E sao cho MC = MA, ND = NB, NE = NA. Chứng minh rằng năm điểm A, B, C, D, E cùng thuộc một đường tròn.

*HD: C, D, E nằm trên cung chứa góc  dựng trên đoạn AB.*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường phân giác BF. Từ một điểm I nằm giữa B và F, vẽ một đường thẳng song song với AC cắt AB và BC lần lượt tại M và N. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác BIN cắt đường thẳng AI tại một điểm thứ hai là D. Hai đường thẳng DN và BF cắt nhau tại E. a) Chứng minh rằng bốn điểm A, B, D, E cùng nằm trên một đường tròn. b) Chứng minh rằng năm điểm A, B, C, D, E cùng nằm trên một đường tròn. Từ đó suy ra BE CE.

*HD: a) B, D thuộc cung chứa góc dựng trên đoạn AE A, B, D, E (P).*

*b) A, B, C, D (P). (P) và (P) có 3 điểm chung A, B, D (P) (P)*

*.*

1. Cho đường tròn (O) đường kính AB, điểm C di động trên (O). Gọi M là giao điểm ba đường phân giác trong của tam giác ABC. Điểm M di động trên đường nào?

*HD:*

1. Dựng tam giác ABC biết BC = 3*cm*, , AB = 3,5*cm*.

*HD: Bài toán có hai nghiệm hình.*

1. Dựng tam giác ABC biết BC = 4*cm*, đường cao BD = 3*cm* và đường cao CE = 3,5*cm*.

*HD:*

VII. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

**1. Định nghĩa**

*Một tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn là* ***tứ giác nội tiếp*** *đường tròn.*

**2. Định lí**

*Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng .*

*Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng  thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.*

**3. Một số dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp**

*Tứ giác có bốn đỉnh nằm trên một đường tròn là tứ giác nội tiếp đường tròn.*

*Tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng  thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.*

*Tứ giác ABCD có hai đỉnh C và D sao cho thì tứ giác ABCD nội tiếp được.*

***Chú ý:*** *Trong các tứ giác đã học thì hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân nội tiếp được đường tròn.*

**BÀI TẬP:**

1. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O) và . Gọi M là một điểm tuỳ ý trên cung nhỏ AC. Vẽ tia B*x* AM, cắt tia CM tại D. a) Tính số đo góc . b) Chứng minh rằng MD = MB.

*HD: a) b) MBD cân MD = MB.*

1. Cho tam giác ABC không có góc tù. Các đường cao AH và đường trung tuyến AM không trùng nhau. Gọi N là trung điểm của AB. Cho biết : . a) Chứng minh tứ giác AMHN nội tiếp. b) Tính số đo của góc .

*HD:*

*a, => AHMN nội tiếp.*

*b,*

1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Điểm E di động trên cạnh AB. Qua B vẽ một đường thẳng vuông góc với tia CE tại D và cắt tia CA tại H. Chứng minh rằng: a) Tứ giác ADBC nội tiếp. b) Góc có số đo không đổi khi E di động trên cạnh AB. c) Khi E di động trên cạnh AB thì  không đổi.

*HD:*

*a) b)*

*c) Vẽ EK BC. KBE ∽ ABC BE.BA = BK.BC;*

*KCE ∽ DCB CE.CD = CK.CB.*

1. Cho nửa đường tròn đường kính AB và dây AC. Từ một điểm D trên AC, vẽ DE AB. Hai đường thẳng DE và BC cắt nhau tại F. Chứng minh rằng: a) Tứ giác BCDE nội tiếp. b).

*HD:*

*a) b) AECF nội tiếp .*

1. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Lấy hai điểm C và D trên nửa đường tròn sao cho cung AC=CD=DB. Các tiếp tuyến vẽ từ B và C của nửa đường tròn cắt nhau tại I. Hai tia AC và BD cắt nhau tại K. Chứng minh rằng: a) Các tam giác KAB và IBC là những tam giác đều. b) Tứ giác KIBC nội tiếp.

*HD:*

*a) Chứng minh mỗi tam giác có hai góc  b).*

1. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và tia tiếp tuyến B*x* của nửa đường tròn. Trên tia B*x* lấy hai điểm C và D (C nằm giữa B và D). Các tia AC và BD lần lượt cắt đường tròn tại E và F. Hai dây AE và BF cắt nhau tại M. Hai tia AF và BE cắt nhau tại N. Chứng minh rằng: a) Tứ giác FNEM nội tiếp. b) Tứ giác CDFE nội tiếp.

*HD: a) b).*

1. Cho tam giác ABC. Hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H. Gọi D là điểm đối xứng của H qua trung điểm M của BC. a) Chứng minh rằng tứ giác ABDC nội tiếp được đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn đó. b) Đường thẳng DH cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là I. Chứng minh rằng năm điểm A, I, F, H, E cùng nằm trên một đường tròn.

*HD: a) BHCD là hình bình hành . O là trung điểm của AD.*

*b).*

1. Cho tam giác ABC. Dựng ra ngoài tam giác đó các tam giác đều BCD, ACE và ABF. Chứng minh rằng: a) Ba đường tròn ngoại tiếp ba tam giác đều nói trên cùng đi qua một điểm. b) Ba đường thẳng AD, BE, CF cùng đi qua một điểm. c) Ba đoạn thẳng AD, BE, CF bằng nhau.

*HD: a) Gọi O là giao điểm thứ hai của hai đường tròn (ABF) và (ACE) .*

* *=> BOCD nội tiếp nên đường tròn (BCD) cũng đi qua O.*

*b) A, O, D thẳng hàng. Tương tự B, O, E thẳng hàng; C, O, F thẳng hàng Ba đường thẳng AD, BE, CF đồng qui.*

*c) ABD = FBC AD = CF; ACF = AEB CF = BE.*

1. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O), hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại I. Vẽ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABI. Tiếp tuyến của đường tròn này tại I cắt AD và BC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng: a) MN // CD. b) Tứ giác ABNM nội tiếp.

*HD:*

*a) MN // CD b) .*

1. Cho góc nhọn x*Oy*. Trên tia O*x* lấy hai điểm A và B sao cho OA = 2*cm,* OB = 6*cm*. Trên tia O*y* lấy hai điểm C và D sao cho OC = 3*cm,* OD = 4*cm*. Nối BD và AC. Chứng minh tứ giác ABCD nội tiếp.

*HD:*

1. Cho đường tròn (O) và một điểm A trên đường tròn (O). Từ một điểm M trên tiếp tuyến tại A, vẽ cát tuyến MBC. Gọi I là trung điểm BC. Chứng minh tứ giác AMIO nội tiếp.

*HD:*

VIII. ĐƯỜNG TRÒN NGOẠI TIẾP. ĐƯỜNG TRÒN NỘI TIẾP

**1. Định nghĩa**

*a) Đường tròn đi qua tất cả các đỉnh của một đa giác là* ***đường tròn ngoại tiếp*** *đa giác và đa giác là* ***đa giác nội tiếp*** *đường tròn.*

*b) Đường tròn tiếp xúc với tất cả các cạnh của một đa giác là* ***đường tròn nội tiếp*** *đa giác và đa giác là* ***đa giác ngoại tiếp*** *đường tròn.*

**2. Định lí**

Bất kì đa giác đều nào cũng có một và chỉ một đường tròn ngoại tiếp, có một và chỉ một đường tròn nội tiếp.

Tâm của hai đường tròn này trùng nhau và là **tâm** của đa giác đều.

Tâm này là giao điểm hai đường trung trực của hai cạnh hoặc là hai đường phân giác của hai góc.

***Chú ý:***

*Bán kính đường tròn ngoại tiếp đa giác là khoảng cách từ tâm đến đỉnh.*

*Bán kính đường tròn nội tiếp đa giác là khoảng cách từ tâm O đến 1 cạnh.*

*Cho n\_ giác đều cạnh a. Khi đó:*

*– Chu vi của đa giác:  (p là nửa chu vi).*

*– Mỗi góc ở đỉnh của đa giác có số đo bằng .*

*– Mỗi góc ở tâm của đa giác có số đo bằng .*

*– Bán kính đường tròn ngoại tiếp:  .*

*– Bán kính đường tròn nội tiếp:  .*

*– Liên hệ giữa bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp: .*

*– Diện tích đa giác đều: .*

**BÀI TẬP:**

1. Một đường tròn có bán kính . Tính diện tích hình vuông nội tiếp đường tròn đó.

*HD:  .*

1. Một đa giác đều nội tiếp đường tròn . Biết độ dài mỗi cạnh của nó là . Tính diện tích của đa giác đều đó.

*HD:   .*

1. Cho lục giác đều ABCDEF, độ dài mỗi cạnh là *a*. Các đường thẳng AB và CD cắt nhau tại M, cắt đường thẳng EF theo thứ tự tại N và P. a) Chứng minh MNP là tam giác đều. b) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp MNP.

*HD:*

*a) MNP có 3 góc bằng  MNP là tam giác đều cạnh  b) .*

1. Cho ngũ giác đều ABCDE cạnh *a*. Hai đường chéo AC và AD cắt BE lần lượt tại M và N. a) Tính tỉ số giữa các bán kính của đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp ngũ giác đó. b) Chứng minh rằng các tam giác AMN và CMB là các tam giác cân. c) Chứng minh rằng .

*HD:*

*a) .*

*b) Vẽ đường tròn ngoại tiếp ngũ giác đều Cung AB=BC=CD=DE=EA. Dùng các định lí về góc trong đường tròn, chứng minh mỗi tam giác có hai góc bằng nhau.*

*c) ABM ∽ ACB .*

1. Cho đường tròn (O; R). Từ một điểm A trên đường tròn (O) vẽ các cung AB, AC sao cho sđAB=300; sđAC=900. (điểm A nằm trên cung BC nhỏ). Tính các cạnh và diện tích của tam giác ABC.

*HD: , , , .*

IX. ĐỘ DÀI ĐƯỜNG TRÒN, CUNG TRÒN

**1. Công thức tính độ dài đường tròn (chu vi đường tròn)**

*Độ dài C của một đường tròn bán kính R được tính theo công thức:*

 *hoặc  ()*

**2. Công thức tính độ dài cung tròn**

*Trên đường tròn bán kính R, độ dài l của một cung  được tính theo công thức:*

*.*

**BÀI TẬP:**

1. Cho . Hãy điền vào các bảng sau:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *Bán kính R* | *Đường kính d* | *Độ dài C* | *Diện tích S* |
| *5* |  |  |  |
|  | *6* |  |  |
|  |  | *94,2* |  |
|  |  |  | *28,26* |

*HD:*

1. Cho đường tròn (O) bán kính OA. Từ trung điểm M của OA vẽ dây BC OA. Biết độ dài đường tròn (O) là . Tính: a) Bán kính đường tròn (O). b) Độ dài hai cung BC của đường tròn.

*HD:*

*a, C=2.R=4 =>R=2cm*

*b, Vì OB=2cm, OM=1cm nên . Từ đó tính cung BC*

1. Tam giác ABC có AB = AC = 3*cm*, . Tính độ dài đường tròn ngoại tiếp ABC.

*HD: Gọi M là trung điểm BC => A,O,M thẳng hàng và nên CAO đều =>OA=AC=3cm.*

1. Một tam giác đều và một hình vuông có cùng chu vi là 72*cm*. Hỏi độ dài đường tròn ngoại tiếp hình nào lớn hơn? Lớn hơn bao nhiêu?

*HD:*

1. Cho hai đường tròn (O; R) và (O; R) tiếp xúc ngoài với nhau tại A. Một đường thẳng qua A cắt đường tròn (O) tại B, cắt đường tròn (O) tại C. Chứng minh rằng nếu  thì độ dài của cung AC bằng nửa độ dài của cung AB (chỉ xét các cung nhỏ AC, AB).

*HD:*

1. Cho đường tròn đường kính . Trên đường tròn lấy một điểm A sao cho . Gọi  là chu vi các đường tròn có đường kính lần lượt là CA, AB, BC. Chứng minh rằng: .

*HD:*

1. Cho tứ giác ABCD ngoại tiếp đường tròn (O). Vẽ ra phía ngoài tứ giác này bốn nửa đường tròn có đường kính lần lượt là bốn cạnh của tứ giác. Chứng minh rằng tổng độ dài của hai nửa đường tròn có đường kính là hai cạnh đối diện bằng tổng độ dài hai nửa đường tròn kia.

*HD:*

1. Cho nửa đường tròn (O; 10*cm*) có đường kính AB. Vẽ hai nửa đường tròn đường kính OA và OB ở trong nửa đường tròn (O; 10*cm*). Tính diện tích của phần nằm giữa ba đường tròn.

*HD:*

1. Cho nửa đường tròn (O) đường kính BC. Lấy một điểm A trên (O) sao cho AB < AC. Vẽ hai nửa đường tròn đường kính AB và AC ở phía ngoài tam giác ABC. Chứng minh diện tích tam giác ABC bằng tổng hai diện tích của hai hình trăng khuyết ở phía ngoài (O).

*HD:*

X. DIỆN TÍCH HÌNH TRÒN, HÌNH QUẠT TRÒN

**1. Công thức tính diện tích hình tròn**

*Diện tích S của một hình tròn bán kính R được tính theo công thức: *

**2. Công thức tính diện tích hình quạt tròn**

*Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cung  được tính theo công thức:*

* hay  (l là độ dài cung  của hình quạt tròn).*

**BÀI TẬP:**

1. Một hình vuông và một hình tròn có cùng chu vi. Hỏi hình nào có diện tích lớn hơn.

*HD: Gọi chu vi mỗi hình là 4a  .*

1. Chứng minh rằng diện tích hình tròn ngoại tiếp hình vuông bằng hai lần diện tích hình tròn nội tiếp hình vuông đó.

*HD: Gọi độ dài cạnh hình vuông là a .*

1. Tính diện tích hình vành khăn tạo thành bới đường tròn nội tiếp và đường tròn ngoại tiếp tam giác đều cạnh .

*HD: ,  .*

1. Một tam giác đều cạnh *a* nội tiếp trong đường tròn (O). Tính diện tích hình viên phân tạo thành bởi một cạnh của tam giác và một cung nhỏ căng cạnh đó.

*HD: .*

1. Tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH = 2*cm*. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ BC có chứa A ta vẽ ba nửa đường tròn có đường kính lần lượt là BH, CH và BC. Tính diện tích miền giới hạn bởi ba nửa đường tròn đó.

*HD: Đặt    .*

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

1. Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Từ A và B vẽ các tiếp tuyến A*x* và B*y* với nửa đường tròn. Một góc vuông quay quanh O, hai cạnh của góc cắt A*x* và B*y* lần lượt tại C và D. Hai đường thẳng OD và A*x* cắt nhau tại E. Chứng minh rằng: a) . b) Tam giác CDE là tam giác cân. c) CD là tiếp tuyến của nửa đường tròn (O).

*HD: a) AOC ∽ BDO .*

*b) CDE có CO vừa là đường cao, vừa là trung tuyến.*

*c) Vẽ OF CD FOD = AOE OF = OA = R CD là tiếp tuyến của (O).*

1. Cho đường tròn (O; R) đường kính AB, tia tiếp tuyến A*x*. Trên tia A*x* lấy điểm M sao cho . Vẽ tiếp tuyến MC (C là tiếp điểm). Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt tia BC tại D. a) Chứng minh rằng BD // OM. b) Xác định dạng của các tứ giác OBDM và AODM. c) Gọi E là giao điểm của AD với OM, F là giao điểm của MC với OD. Chứng minh rằng EF là tiếp tuyến của đường tròn (O).

*HD:*

*a) BD // OM.*

*b) OBDM là hình bình hành, AODM là hình chữ nhật.*

*c) OE = R, FE OE EF là tiếp tuyến của (O).*

1. Cho hai đường tròn (O) và (O) cắt nhau tại A và B. Vẽ các đường kính AOC và AOD. Đường thẳng AC cắt đường tròn (O) tại E. Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại F. Chứng minh rằng: a) Ba điểm C, B, D thẳng hàng. b) Tứ giác CDEF nội tiếp. c) A là tâm đường tròn nội tiếp (hoặc bàng tiếp) của tam giác BEF.

*HD: a). b).*

c) Chứng minh FA là tia phân giác trong (hoặc ngoài) của góc F, EA là tia phân giác trong (hoặc ngoài) của góc E của BEF A là tâm đường tròn nội tiếp (hoặc bàng tiếp) của tam giác BEF.

1. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến AT và cát tuyến ABC với đường tròn (B nằm giữa A và C). Gọi H là hình chiếu của T trên OA. Chứng minh rằng: a)  b)  c) Tứ giác OHBC nội tiếp.

*HD: a) ATB ∽ ACT . b)* *.*

*c) AOC ∽ ABH OHBC nội tiếp.*

1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) (AB < AC). Vẽ dây AD // BC. Tiếp tuyến tại A và B của đường tròn cắt nhau tại E. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chứng minh rằng: a) . b) Năm điểm E, A, I, O, B cùng nằm trên một đường tròn. c) IO IE.

*HD:*

*a) . b) ABOI, AOBE nội tiếp.*

*c) IO IE*

1. Cho hình vuông ABCD. Trên hai cạnh CB và CD lần lượt lấy hai điểm di động M và N sao cho CM = CN. Từ C vẽ đường thẳng vuông góc với BN, cắt BN tại E và AD tại F. a) Chứng minh tứ giác FMCD là hình chữ nhật. b) Chứng minh nam điểm A, B, M, E, F cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm O của đường tròn đó. c) Đường tròn (O) cắt AC tại một điểm thứ hai là I. Chứng minh tam giác IBF vuông cân. d) Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O) cắt đường thẳng FI tại K. Chứng minh ba điểm K, C, D thẳng hàng.

*HD: a) FDC = NCB FD = CN = CM*

*b) A, B, M, E, F nằm trên đường tròn đường kính BF. O là trung điểm của BF.*

*c) Cung IF=Cung IB IF = IB*

*d) IBKC nội tiếp .*

1. Cho đường tròn (O). Vẽ hai dây AC và BD bằng nhau và vuông góc với nhau tại I (điểm B nằm trên cung nhỏ AC). Chứng minh rằng: a) Tứ giác ABCD là hình thang cân. b) Tổng diện tích hai hình quạt tròn AOB và COD bằng tổng diện tích hai hình quạt tròn AOD và BOC (các hình quạt tròn ứng với các cung nhỏ).

*HD: a) AB // CD*

*b) .*

1. Cho nửa đường tròn đường kính BC = 10*cm* và dây BA = 8*cm*. Vẽ ra phía ngoài của tam giác ABC các nửa đường tròn đường kính AB và AC. a) Tính diện tích tam giác ABC. b) Tính tổng diện tích hai hình viên phân. c) Tính tổng diện tích hai hình trăng khuyết.

*HD: a)  b)  c) .*

1. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). Biết BC = 2*cm*, . a) Tính diện tích hình tròn (O). b) Tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi dây BC và cung nhỏ BC. c) Xác định vị trí của điểm A để diện tích tam giác ABC là lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó.

*HD: a)   b) *

*c)  lớn nhất A là điểm chính giữa cung lớn BC. Khi đó .*

1. Cho tam giác ABC nhọn. Đường tròn đường kính BC cắt AB ở N và cắt AC ở M. Gọi H là giao điểm của BM và CN. a) Tính số đo các góc BMC và BNC. b) Chứng minh AH vuông góc BC. c) Chứng minh tiếp tuyến tại N đi qua trung điểm AH.

*HD:*

1. Cho đường tròn tâm O, đường kính AB = 2R và điểm M trên đường tròn sao cho góc = 900. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại H. a) Chứng minh AM và AN là các tiếp tuyến của đường tròn (B; BM). b) Chứng minh . c) Chứng minh tam giác BMN là tam giác đều và điểm O là trọng tâm của nó. d) Tia MO cắt đường tròn (O) tại E, tia MB cắt (B) tại F.Chứng minh ba điểm N, E, F thẳng hàng.

*HD:*

1. Cho đường tròn (O; R) và điểm A cách O một khoảng bằng 2R, kẻ tiếp tuyến AB tới đường tròn (B là tiếp điểm). a) Tính số đo các góc của tam giác OAB. b) Gọi C là điểm đối xứng với B qua OA. Chứng minh điểm C nằm trên đường tròn O và AC là tiếp tuyến của đường tròn (O). c) AO cắt đường tròn (O) tại G. Chứng minh G là trọng tâm tam giác ABC.

*HD:*

1. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O; R), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC. a) Chứng minh OA  BC và tính tích OH.OA theo R. b) Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Chứng minh CD//OA. c) Gọi E là hình chiếu của C trên BD, K là giao điểm của AD và CE. Chứng minh K là trung điểm CE.

*HD:*

1. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O; R), kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ BE  AC và CF  AB (E ), BE và CF cắt nhau tại H. a) Chứng minh tứ giác BOCH là hình thoi. b) Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng. c) Xác định vị trí điểm A để H nằm trên đường tròn (O).

*HD:*

1. Cho đường tròn (O; 3cm) và một điểm A có OA = 6 cm. Kẻ các tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC. a) Tính độ dài OH. b) Qua điểm M bất kì thuộc cung nhỏ BC, kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt AB và AC theo thứ tự tại E và F. Tính chu vi tam giác AEF. c) Tính số đo góc BOA.

*HD:*

*a, OB2=OH.OA =>OH=1,5cm.*

*b, AE+EF+FA=AE+EM+MF+FA=(AE+EB)+(CF+FA)=AB+AC=2AB.*

*OB2+AB2=OA2 nên AB=5cm, => chu vi=10cm.*

*c, Vì OA=2OB nên*

1. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi A*x*, B*y* là các tia vuông góc với AB (A*x*, B*y* và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M bất kì thuộc tia A*x*, kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt B*y* ở N. a) Tính số đo góc MON. b) Chứng minh MN = AM + BN. c) Tính tích AM.BN theo R.

CHƯƠNG IV

HÌNH TRỤ – HÌNH NÓN – HÌNH CẦU

I. HÌNH TRỤ

**1. Hình trụ**

*Khi quay hình chữ nhật ABOO một vòng quanh cạnh OO cố định, ta được một* ***hình trụ****.*

*Hai hình tròn (O) và (O) bằng nhau và nằm trong hai mặt phẳng song song là* ***hai đáy*** *của hình trụ.*

*Đường thẳng OO là* ***trục*** *của hình trụ.*

*Mỗi vị trí của AB là một* ***đường sinh****. Các đường sinh vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Độ dài của đường sinh là* ***chiều cao*** *của hình trụ.*

**2. Cắt hình trụ bởi một mặt phẳng**

*Khi cắt hình trụ bởi một mặt phẳng* ***song song với đáy****, thì phần mặt phẳng nằm trong hình trụ (mặt cắt – thiết diện) là* ***một hình tròn bằng hình tròn đáy****.*

*Khi cắt hình trụ bởi một mặt phẳng* ***song song với trục*** *OO thì mặt cắt là* ***một hình chữ nhật***

**3. Diện tích – Thể tích**

*Cho hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao h.*

*Diện tích xung quanh: *

*Diện tích toàn phần: *

*Thể tích: *

**BÀI TẬP:**

1. Một hình trụ có bán kính đáy bằng  đường cao. Khi cắt hình trụ này bằng một mặt phẳng đi qua trục thì mặt cắt là một hình chữ nhật có diện tích là . Tính diện tích xung quanh và thể tích hình trụ.

*HD: , .*

1. Một hình trụ có đường cao bằng đường kính đáy. Biết thể tích của hình trụ là . Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

*HD: .*

1. Một hình trụ có bán kính đáy là . Biết diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Tính chiều cao của hình trụ.

*HD: .*

1. Một hình trụ có diện tích xung quanh là  và diện tích toàn phần là . Tính thể tích của hình trụ đó.

*HD: .*

II. HÌNH NÓN – HÌNH NÓN CỤT

**1. Hình nón**

*Khi quay tam giác vuông một vòng quanh cạnh OA cố định thì được một* ***hình nón****.*



*Điểm A là* ***đỉnh*** *của hình nón.*

*Hình tròn (O) là* ***đáy*** *của hình nón.*

*Mỗi vị trí của AC là một* ***đường sinh*** *của hình nón.*

*Đoạn AO là* ***đường cao*** *của hình nón.*

**2. Diện tích – Thể tích hình nón**

*Cho hình nón có bán kính đáy R và đường sinh l, chiều cao h.*

*Diện tích xung quanh:  Diện tích toàn phần: *

*Thể tích: *

**3. Hình nón cụt**



*Khi cắt hình nón bởi một* ***mặt phẳng song song với đáy*** *thì phần*

*hình nón nằm giữa mặt phẳng nói trên và mặt phẳng đáy là một*

***hình nón cụt****.*

*Hai hình tròn (O) và (O) là* ***hai đáy****.*

*Đoạn OO là* ***trục****. Độ dài OO là* ***chiều cao****.*

*Đoạn AC là* ***đường sinh****.*

**4. Diện tích – Thể tích hình nón cụt**

*Cho hình nón cụt có các bán kính đáy R và r, chiều cao h, đường sinh l.*

*Diện tích xung qaunh:  Thể tích: *

**BÀI TẬP:**

1. Cho tam giác ABC vuông tại C. Biết BC = *a*, AC = *b*. Quay tam giác vuông này một vòng lần lượt quanh cạnh AC và BC, được một hình nón đỉnh A và một hình nón đỉnh B. Hãy so sánh tỷ số thể tích của hai hình nón và tỷ số diện tích xung quanh của hai hình nón ấy.

*HD: .*

1. Một hình quạt tròn có bán kính  và góc ở tâm là . Người ta uốn hình quạt này thành một hình nón. Tính số đo nửa góc ở đỉnh của hình nón đó.

*HD: .*

1. Một hình nón có bán kính đáy bằng  và diện tích xung quanh là . Tính thể tích của hình nón đó.

*HD: .*

1. Một hình nón có đường sinh dài và diện tích xung quanh là . a) Tính chiều cao của hình nón đó. b) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình nón đó.

*HD: a)  b) , .*

1. Một chiếc xô hình nón cụt làm bằng tôn để đựng nước. Các bán kính đáy là  và , chiều cao là . a) Tính dung tích của xô. b) Tính diện tích tôn để làm xô (không kể diện tích các chỗ ghép).

*HD: a)  lít b) *

1. Từ một khúc gỗ hình trụ cao , người ta tiện thành một hình nón có thể tích lớn nhất. Biết phần gỗ bỏ đi có thể tích là . a) Tính thể tích khúc gỗ hình trụ. b) Tính diện tích xung quanh hình nón.

*HD: a)  b) *

II. HÌNH CẦU

**1. Hình cầu**

*Khi quay nửa hình tròn tâm O, bán kính R một vòng quanh đường kính AB cố định thì được một* ***hình cầu****.*

*Nửa đường tròn trong phép quay nói trên tạo thành một* ***mặt cầu****.*

*Điểm O là* ***tâm****, R là* ***bán kính*** *của hình cầu hay mặt cầu đó.*

**2. Cắt hình cầu bởi một mặt phẳng**

Khi cắt hình cầu bởi một mặt phẳng ta được một hình tròn.

*Khi cắt mặt cầu bán kính R bởi một mặt phẳng ta được một đường tròn:*

*– Đường tròn đó có bán kính R nếu mặt phẳng đi qua tâm (gọi là* ***đường tròn lớn****).*

*– Đường tròn đó có bán kính bé hơn R nếu mặt phẳng không đi qua tâm.*

**3. Diện tích – Thể tích**

*Cho hình cầu bán kính R.*

*Diện tích mặt cầu:  Thể tích hình cầu: *

**BÀI TẬP:**

1. Một hình cầu có số đo diện tích mặt cầu (tính bằng ) đúng bằng số đo thể tích của nó (tính bằng ). Tính bán kính của hình cầu đó.

*HD: .*

1. Một hình cầu có diện tích bề mặt là . Tính thể tích hình cầu đó.

*HD: .*

1. Cho tam giác đều ABC cạnh *a*, đường cao AH. Ta quay nửa đường tròn nội tiếp, nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác đều này và tam giác vuông ABH một vòng quanh AH, được hai mặt cầu và một hình nón. Tính: a) Tỉ số diện tích hai mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình nón. b) Tỉ số thể tích của hai hình cầu nói trên. c) Thể tích phần không gian giới hạn bởi hình nón và hình cẩu ngoại tiếp hình nón.

*HD: . a)  b)  c) .*

BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG IV

1. Một hình cầu nội tiếp trong một hình trụ. Cho biết diện tích mặt cầu là . Hãy tính: a) Diện tích toàn phần của hình trụ. b) Thể tích hình trụ.

*HD: a)  b) .*

1. Tam giác ABC vuông tại A có BC = 2*a* và . Quay tam giác vuông này một vòng quanh cạnh AB ta được một hình nón đỉnh B. Chứng minh rằng diện tích toàn phần của hình nón ấy bằng diện tích mặt cầu có đường kính AB.

*HD: .*

1. Người ta chia hình tròn  thành hai hình quạt có các số đo cung là  và . Từ hai hình quạt này người ta uốn lại thành hai hình nón. a) Tính nửa góc ở đỉnh của mỗi hình nón. b) Tính thể tích của mỗi hình nón. c) Tính tỉ số diện tích toàn phần của hai hình nón.

*HD: a) Độ dài cung nhỏ , độ dài cung lớn .*

*Hình nón tạo bởi hình quạt nhỏ có đường sinh  và chu vi đáy *

* .*

*Hình nón tạo bởi hình quạt lớn có đường sinh , chu vi đáy *

* .*

*b) ,  c) .*

**BÀI TẬP TỔNG HỢP**

**Bài 1** .Cho hai đường tròn (O;R) và (O’;R’) cắt nhau tại A,B (O và O’ thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB ) .Các đường thẳng AO và AO’ cắt (O) tại hai điểm C,D và cắt đường tròn (O’) tại E,F .Chứng minh :

a) Ba điểm C,B,F thẳng hàng b) Tứ giác CDEF nội tiếp

c) AB,CD,EF đồng quy d)A là tâm đường tròn nội tiếp tam giác BDE

e ) MN là tiếp tuyến chung của (O) và (O’) . Chứng minh MN đi qua trung điểm của AB

*HD:*

**Bài 2** . Cho đường tròn tâm (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn . Các tiếp tuyến với đường tròn kẻ từ A tiếp xúc với đường tròn tại B,C . Gọi M là điểm tuỳ ý trên đường tròn khác B và C .Từ M kẻ MH BC,MK CA,MIAB . CM:

a) Tứ giác ABOC ,MIBH,MKCH nội tiếp b)  MIH ~  MHK d) MI.MK=MH2

*HD:*

**Bài 3.** Cho ABC nhọn nội tiếp (O) . Gọi BB’,CC’ là các đường cao của ABC cắt nhau tại H.Gọi E là điểm đối xứng của H qua BC ,F là điểm đối xứng của H qua trung điểm I của BC , Gọi G là giao điểm của AI và OH . CM:

a) Tứ giác BHCF là hình bình hành b) E,F nằm trên (O)

c) Tứ giác BCFE là hình thang cân d) G là trọng tâm ABC

e) AOB’C’.

*HD:*

**Bài 4**. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Một cát tuyến MN quay quanh trung điểm H của OB .Chứng minh:

a) Khi cát tuyến MN di động , trung điểm I của MN luôn nằm trên một đường cố định

b) Từ A kẻ tia AxMN . Tia BI cắt Ax tại C . Chứng minh tứ giác BMCN là hình bình hành

c) Chứng minh C là trực tâm AMN

d) Khi MN quay xung quanh H thì C di động trên đường nào

e) Cho AB=2R ,AM.AN=3R2;AN=R. Tính diện tích phần hình tròn nằm ngoài tam giác AMN.

*HD:*

**Bài 5.** Cho 1/2(O) đường kính AB=2R ,kẻ tuyếp tuyến Bx với (O).Gọi C,D là các điểm di động trên (O) .Các tia AC,AD cắt Bx tại E,F ( F nằm giữa B và E). Chứng minh

a) ABF ~ BDF b) Tứ giác CEFD nội tiếp

c) Khi C,D di động thì tích AC.AE=AD.AF và không đổi.

*HD:*

**Bài 6**. Cho tam giác ABC cân tại A có BC=6cm đường cao AH=4cm nội tiếp đường tròn (O;R) đường kính AA’ .Kẻ đường kính CC’, kẻ AKCC’

a) Tính R ? b)Tứ giác CAC’A’ , AKHC là hình gì ? Tại sao?

c) Tính diện tích phần hình tròn (O) nằm ngoài ABC ?

*HD:*

**Bài 7**. Từ một điểm A nằm ngoài (O) kẻ tiếp tuyến AM,AN với (O) , (M,N(O))

a) Từ O kẻ đường thẳng OM cắt AN tại S . Chứng minh : SO = SA

b) Trên cung nhỏ MN lấy điểm P khác M và N . Tiếp tuyến tại P cắt AM tại B , AN tại C .Giả sử A cố định ,P là điểm chuyển động trên cung nhỏ MN . Chứng minh chu vi ABC không đổi ? . Tính giá trị không đổi ấy?

c) Vẽ cát tuyến AEF không đi qua điểm O ,H là trung điểm EF . Chứng minh các điểm A,M,H,O,N cùng thuộc một đường tròn

d) Chứng minh AE.AF=AM2

e) Gọi K là giao điểm của MH với (O) .Chứng minh NK//AF.

*HD:*

**Bài 8**. Cho 1/2(O) đường kính AB . Vẽ tiếp tuyến Ax,By . Từ C là một điểm bất kỳ trên nửa đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến với đường tròn cắt Ax , By tại E,F

a) Chứng minh FE=AE+BF

b) Gọi M là giao điểm OE với AC , N là giao điểm OF với BC . Tứ giác MCNO là hình gì ? Tại sao ?

c) Gọi D là giao điểm AF và BE Chứng minh CD//AE

d) Chứng minh EF.CD=EC.FB

e) Khi C di chuyển trên (O) thì M,N di chuyển trên đường nào ?

g) Xác định vị trí của C để diện tích EOF bé nhất ?

*HD:*

**Bài 11**. Cho hai đường tròn (O;R) và (O’;r) tiếp xúc ngoài tại C . Gọi AC, BC là hai đường kính của (O) và (O’) . DE là dây cung vuông góc tại trung điểm M của AB . Gọi giao điểm thứ hai của đường thẳng DC với đường tròn(O’) tại F . BD cắt (O’) tại G . Chứng minh :

a) Tứ giác AEBF là hình thoi b) Ba điểm B,E,F thẳng hàng

c) 4 điểm M,D,B,F thuộc một đường tròn d) DF,EG,AB đồng quy

e) MF=1/2DE g) MF là tiếp tuyến của (O’).

*HD :*

**Bài 12.** Cho 1/2(O) đường kính AB , M là một điểm trên nửa đường tròn . Hạ MHAB ,vẽ hai nửa đường tròn (I) đường kính AH,(K) đường kính BH nằm phía trong nửa (O) , cắt MA,MB tại P,Q . Chứng minh :

a) MH=PQ b) PQ là tiếp tuyến chung của (I),(K)

c)PQ2=AH.BH; MP.MA=MQ.MB d) Tứ giác APQB nội tiếp

e) Xác định vị trí của M để chu vi , diện tích tứ giác IPQK lớn nhất ?

*HD :*

**Bài 13.** Cho tam giác vuông ABC , vuông tại A , đường cao AH nội tiếp (O) , d là tiếp tuyến của (O) tại A . Các tiếp tuyến của (O) tại B,C cắt d tại D và E

a) Tính b) Chứng minh : DE = BD+CE c) Chứng minh : BD.CE=R2 d) Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn đường kính DE ?

*HD:*

**Bài 14**. Cho tam giác ABC cân tại A , các đường cao AD, BE cắt nhau tại H . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE . Chứng minh :

a) ED=1/2BC b) DE là tiếp tuyến của (O)

c) Tính DE biết DH = 2cm , HA = 6cm.

*HD:*

**Bài 15** . Cho 1/2(O) đường kính AB . Vẽ tiếp tuyến Ax,By . Từ M là một điểm bất kỳ trên nửa đường tròn (O) vẽ tiếp tuyến với đường tròn cắt Ax , By tại C,D . Các đường thẳng AD,BC cắt nhau tại N . Chứng minh :

a) CD=AB+BD b) MN//AC c) CD.MN=CM.DB

d) Điểm M nằm ở vị trí nào trên1/2(O) thì AC+BD nhỏ nhất?

*HD:*

**Bài 16**. Cho  ABC cân tại A ,I là tâm đường tròn nội tiếp , K là tâm đường tròn bàng tiếp của góc A , O là trung điểm của IK . Chứng minh :

a) Bốn điểm B,I,C,K thuộc đường tròn tâm O b) AC là tiếp tuyến của (O)

c) Biết AB = AC = 20cm , BC = 24cm tính bán kính (O)

d) Tính phần giới hạn bởi (O) và tứ giác ABOC.

*HD:*

**Bài 17**. Cho ABC vuông tại A . Vẽ (A;AH) . Gọi HD là đường kính của (A) đó . Tiếp tuyến của đường tròn tại D cắt CA tại E . Gọi I là hình chiếu của A trên BE Chứng minh : a) BEC cân b) AI = AH

c) BE là tiếp tuyến của (A;AH) d) BE = BH+DE

*HD:*

**Bài 18**. Cho hình vuông ABCD , điểm E trên cạnh BC . Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với DE , đường thẳng này cắt các đường thẳng DE và DC tại K,H . Chứng minh:

a) Tứ giác BHCD nội tiếp b) Tính c) KC.KD=KH.KB

d) Khi E di chuyển trên BC thì H di chuyển trên đường nào ?

*HD:*

**Bài 19** . Cho (O;R) có hai đường kính AB và CD vuông góc với nhau . Trên đoạn AB lấy điểm M (khác O). Đường thẳng CM cắt (O) tại điểm thứ hai N. Đường thẳng vuông góc với AB tại M cắt tiếp tuyến tại N của (O) ở điểm P .CM:

a) Tứ giác OMNP nội tiếp b) Tứ giác CMPO là hình bình hành

c) Tích CM.CN không phụ thuộc vào điểm M

d) Khi M di chuyển trên AB thì P chay trên một đoạn thẳng cố định.

*HD:*

**Bài 20**. Cho ABC vuông tại A (với AB > AC) , đường cao AH . Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E , nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F . Chứng minh:

a) Tứ giác AFHE là hình chữ nhật b) Tứ giác BEFC nội tiếp

c) AE.AB=AF.AC d) EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn

*HD:*

**Bài 21**. Cho (O;R) đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Ax , P Ax sao cho AP >R từ P kẻ tiếp tuyến PM với (O) tại M . Đường thẳng vuông góc với AB tại O căt BM tại N . AN cắt OP tại K, PM cắt ON tại J , PN cắt OM tại J . CM: a) Tứ giác APMO nội tiếp và BM//OP b) Tứ giác OBNP là hình bình hành

c) PI = OI ; PJ = OJ d) Ba điểm I,J,K thẳng hàng.

*HD:*

**Bài 22**. Cho 1/2(O) đường kính AB và điểm M bất kì  1/2(O) (M khác A,B) . Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax . Tia BM cắt Ax tại I , tia phân giác góc IAM cắt 1/2 (O) tại E, cắt tia BM tại F . Tia BE cắt Ax tại H , cắt AM tại K . Chứng minh:

a) IA2=IM.IB b) BAF cân c) Tứ giác AKFH là hình thoi

d) Xác định vị trí của M để tứ giác AKFI nội tiếp một đường tròn

*HD:*

**Bài 23**. Cho ABC vuông tại A . Trên cạnh AC lấy một điểm M , dựng (O) đường kính MC . Đường thẳng BM cắt (O) tại D . Đường thẳng AD cắt (O) tại S , BC cắt (O) tại E . Chứng minh:

a) Tứ giác ABCD nội tiếp , CA phân giác góc SBC b) AB ,EM,CD đồng quy

c) DM phân giác góc ADE d) M là tâm đường tròn nội tiếp ADE

*HD:*

**Bài 24**. Cho ABC vuông tại A . Trên cạnh AB lấy một điểm D . (O) đường kính BD cắt BC tại E . Đường thẳng CD , AE cắt (O) tại F , G . Chứng minh:

a) ABC ~ EBD b) Tứ giác ADEC ,AFBC nội tiếp

c) AC//FG d) AC,DE,BF đồng quy

*HD:*

**Bài 25**. Cho (O;3cm) tiếp xúc ngoài với (O’;1cm) tại A . Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC ( B(O), C  (O’)) .

a) Chứng minh b) Tính BC

c) Tính diện tích phần giới hạn bởi tiếp tuyến BC và các cung nhỏ AB , AC của hai đường tròn

*HD:*

**Bài 26**. Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho AC= 4cm và CB=9cm . Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính là AB,AC,CB và có tâm theo thứ tự là O,I,K. Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn (O) tại E , EA cắt (I) tại M , EB cắt (K) tại N . Chứng minh:

a) EC = MN b) MN là tiếp tuyến chung của (I) và (K)

c) Tính MN d) Tính diện tích giới hạn bởi ba nửa đường tròn.

*HD:*

**Bài 27**. Cho (O) đường kính AB = 2R và một điểm M di chuyển trên nửa đường tròn . Vẽ đường tròn tâm E tiếp xúc với nửa đường tròn (O) tại M và tiếp xúc với AB tại N . MA , MB cắt (E) tại C , D . Chứng minh :

a) CD//AB b) MN phân giác ; và MN luôn đi qua một điểm cố định K

c) Tích KM.KN không đổi d) Gọi CN cắt KB tại C’, DN cắt AK tại D’ . Tìm M để chu vi NC’D’ nhỏ nhất

*HD :*

**Bài 28**. Cho ABC vuông tại A , đường cao AH . Đường tròn đường kính AH cắt các cạnh AB , AC lần lượt tại E , F , đường thẳng qua A vuông góc với EF cắt BC tại I . Chứng minh:

a) Tứ giác AEHF là hình chữ nhật b) AE.AB = AF.AC c) IB = IC

d) Nếu diện tích ABC gấp đôi diện tích hình chữ nhật AEHF thì ABC vuông cân

*HD:*

**Bài 29**. Cho tứ giác ABCD nội tiếp (O) , P là điểm chính giữa cung AB ( phần không chứa C,D) . Hai dây PC , PD cắt dây AB tại E , F . Hai dây AD , PC kéo dài cắt nhau tại I , dây BC , PD kéo dài cắt nhau tại K . CM:

a) b) Tứ giác CDFE , CIKD nội tiếp c) IK//AB

d) PA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp AFD.

*HD:*

**Bài 30**. Cho hình chữ nhật ABCD nội tiếp (O) . Tiếp tuyến tại C của đường tròn cắt AB , AD kéo dài lần lượt tại E và F . Gọi M là trung điểm EF , tiếp tuyến tại B và D của (O) cắt EF lần lượt tại I , J . Chứng minh:

a) AB.AE = AD.AF b) AMBD c) I , J là trung điểm CE , CF

d) Tính diện tích phần hình tròn được giới hạn bởi dây AB và cung nhỏ AD biết AB = 6cm , AD = 6cm

*HD:*

**Bài 31.** Cho (O;R) và (O’;2R) tiếp xúc trong tại A . Qua A kẻ 2 cát tuyến AMN và APQ với M , P thuộc (O) ,với NQ thuộc (O’) . Tia O’M cắt (O’) tại S , gọi H là trực tâm SAO’ . Chứng minh:

a) O’(O) b) Tứ giác SHO’N nội tiếp c) NQ = 2MP.

*HD:*

**Bài 32**. Cho 1/2(O;R) đường kính AB và 1 điểm M bất kì 1/2(O) ( M khác A và B) đường thẳng d tiếp xúc với 1/2(O) tại M cắt đường trung trực của AB tại I . (I) tiếp xúc với AB và cắt đường thẳng d tại C và D ( D nằm trong ) Chứng minh:

a) OC , OD là các tia phân giác b) CAAB , DBAB c) AC.BD = R2

d) Tìm vị trí điểm M để tổng AC+BD nhỏ nhất ? Tính giá trị đó theo R.

*HD:*

**Bài 33**. Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn đường kính BD . Kéo dài AB và CD cắt nhau tại E ; CB và DA cắt nhau tại F . Góc = 1350 . Chứng minh:

a) DBEF b) BA.BE = BC.BF = BD.BG

c) B là tâm đường tròn nội tiếp ACG d) Tính AC theo BD

*HD:*

**Bài 34**. Cho ba điểm A,B,C trên một đưòng thẳng theo thứ tự ấy và một đường thẳng d vuông góc với AC tại A . Vẽ dường tròn đường kính BC và trên đó lấy một điểm M bất kỳ . Tia CM cắt d tại D . Tia AM cắt (O) tại điểm thứ hai là N ; Tia DB cắt (O) tại điểm thư hai là P : Chứng minh:

a) Tứ giác ABMD nội tiếp b) Tích CM.CD không phụ thuộc vào vị trí M

c) Tứ giác APND là hình gì ? tại sao ? d) Trọng tâm G của MAC chạy trên 1 đường tròn cố định

*HD:*

**Bài 35.** Cho ABC nhọn nội tiếp (O) . Từ B và C kẻ hai tiếp tuyến với (O) chúng cắt nhau tại D . Từ D kẻ cát tuyến // với AB cắt (O) tại E , F và cắt AC tại I . Chứng minh:

a) b) Bốn điểm O,C,I,D  một đường tròn c) IE = IF

d) Cho BC cố định , khi A di chuyển trên cung lớn BC thì I di chuyển trên đường nào ?

*HD:*

**Bài 36**. Cho tam giác ABC vuông cân tại C , E là một điểm tuỳ ý trên cạnh BC . Qua B kẻ một tia vuông góc với AE tại H và cắt tia AC tại K . Chứng minh:

a) Tứ giác BHCK nội tiếp b) KC.KA = KH.KB

c) Tính d) Khi E di chuyển trên cạnh BC thì BE.BC+AE.AH không đổi

*HD :*

**Bài 37.** Cho (O) dây AB . Gọi M là điểm chính giữa cung nhỏ AB và C là một điểm nằm giữa đoạn AB . Tia MC cắt (O) tại điểm thứ hai D . Chứng minh:

a) MA2= MC.MD b) BM.BD = BC.MD

c) MB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp BCD

d) Tổng hai bán kính của hai đường tròn ngoại tiếp BCD và ACD không đổi khi C di động trên đoạn AB

*HD :*

**Bài 38**. Cho đoạn thẳng AB và một điểm P nằm giữa A,B . Trên nửa mặt phẳng bờ AB kẻ các tia Ax , By vuông góc với AB và lần lượt trên hai tia đó lấy hai điểm C,D sao cho AC.BD = AP.PB (1) . Gọi M là hình chiếu của P trên CD . CM:

a) ACP ~ BPD b) = 900 từ đó suy ra cách dựng hai điểm C,D

c) = 900

d) Điểm M chạy trên nửa đường tròn cố định khi C,D lần lượt di động trên Ax,By nhưng vẫn thoả mãn(1)

*HD :*

**Bài 39**. Cho ABC vuông ở C và BC< CA . Lấy điểm I trên đoạn AB sao cho IB < IA . Kẻ đường thẳng d đi qua vuông góc với AB , d cắt AC ở F và cắt BC ở E . M là điểm đối xứng với B qua I . Chứng minh :

a) IME ~ IFA ; IE.IF = IA.IB b) Đường tròn ngoại tiếp CEF cắt AE ở N . Chứng minh B,F,N thẳng hàng

c) Cho A, B cố định sao cho = 900 CM : tâm đường tròn ngoại tiếp FAE chạy trên một đường cố định.

*HD :*

**Bài 40** . Cho (O1) ,(O2) tiếp xúc ngoài tại A . Một đường thẳng d tiếp xúc với (O1), (O2) lần lượt tại B , C . Gọi M là trung điểm BC , tia BA cắt (O2) tại D , CA cắt (O1) tại E Chứng minh :

a) ABC vuông b) AM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn

c) =900 d) S­ADE = SABC

*HD :*

**Bài 41.** Cho (O;R) và một điểm A nằm ngoài đường tròn . Từ một điểm M chuyển động trên đường thẳng d vuông góc với OA tại A , vẽ các tiếp tuyến MP , MP’với đường tròn . Dây PP’ cắt OM tại N , cắt OA tại B . Chứng minh :

a) Tứ giác MPOP’ , MNBA nội tiếp b) OA.OB = OM.ON không đổi

c) Khi điểm M di chuyển trên d thì tâm đường tròn nội tiếp MPP’ di chuyển trên đường nào ?

d) Cho =600 và R=8cm tính diện tích tứ giác MPOP’ và hình quạt POP’

*HD :*

**Bài 42**. Cho 1/2(O;R) đường kính AB và 1 điểm M bất kì 1/2(O) ( M khác A và B) . Kẻ hai tiếp tuyến Ax và By với 1/2(O) . Qua M kẻ tiếp tuyến thứ ba với 1/2(O) cắt Ax và By tại C và D , OC cắt AM tại E , OD cắt BM tại F , AC = 4cm , BD = 9cm . Chứng minh :

a) CD = AC+BD ; = 900 b) AC.BD = R2 c) EF = R

d) Tính R ; sin ; tg

e) Tìm vị trí của M để diện tích tứ giác ACDB nhỏ nhất

*HD :*

**Bài 43**. Cho  ABC cân tại A (góc A < 900 ) nội tiếp (O) . Một điểm M tuỳ ý trên cung nhỏ AC . Tia Bx vuông góc với AM cắt tia CM tại D . Chứng minh :

a) AMD = ABC b) BMD cân

c) Khi M chạy trên cung nhỏ AC thì D chạy trên một cung tròn cố định và số đo không đổi

*HD :*

**Bài 44**. Cho (O;R) và dây CD cố định . Gọi H là trung điểm CD . Gọi S là một điểm trên tia đối của tia DC qua S kẻ hai tiếp tuyến SA , SB tới (O) . Đường thẳng AB cắt SO , OH tại E và F , cho R=10cm ; SD=4cm ; OH =6cm . CM:

a) Tứ giác SEHF nội tiếp b) Tích OE.OS không phụ thuộc vào vị trí điểm S c) Tính CD và SA

d) Khi S di chuyển trên tia đối của DC thì AB luôn đi qua một điểm cố định

*HD :*

**Bài 45**. Cho (O;R) và (O’;R’) cắt nhau tại hai điểm A , B (O và O’ thuộc hai nửa mặt phẳng bờ AB ) . Một đường thẳng qua A cắt (O) và (O’) tại hai điểm C,D ( A nằm giữa C và D ) . Các tiếp tuyến tại C và D cắt nhau tại K . Nối KB cắt CD tại I . Kẻ EI//DK (EBD) . Chứng minh:

a) BOO’~BCD b) Tứ giác BCKD nội tiếp

c) AE là tiếp tuyến của (O) d) Tìm vị trí của CD để SBCD  lớn nhất

*HD :*

**Bài 46**. Cho 1/2(O) đường kính AB . Bán kính OC AB tại O , điểm EOC . Nối AE cắt 1/2(O) tại M . Tiếp tuyến tại M cắt OC tại D , BM cắt OC tại K . Chứng minh :

a) DME cân

b) BM.BK không đổi khi E chuyển động trên OC c) Tìm vị trí của E để MA=2MB

d) Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp CME . Chứng minh khi E chuyển động trên OE thì I luôn thuộc một đường thẳng cố định.

*HD :*

**Bài 47**. Cho ABC nhọn nội tiếp (O) . Kẻ đường cao AH và đường kính AK . Hạ BE và CF cùng AK , cho góc ABC=600 và R= 4cm . Chứng minh :

a) Tứ giác ABDE , ACFD nội tiếp b) DF//BK c) Tính SquạtOKC

d) Cho BC cố định , A chuyển động . CM tâm đường tròn ngại tiếp DEF là một điểm cố định

*HD :*

**Bài 48**. Cho 1/2(O;R) đường kính BC và một điểm A(O) . Dựng về phía ngoài  ABC hai nửa đường tròn đường kính AB , AC là (I) và (K) một đường thẳng d thay đổi qua A cắt (I) và (K) tại M và N . Chứng minh :

a) Tứ giác MNCB là hình thang vuông b) AM.AN=MB.NC

c) CMN cân d) Xác định vị trí của d để SBMNC lớn nhất

*HD :*

**Bài 49**. Cho (O;R) và dây AB = R cố định . Điểm M cung lớn AB sao cho MAB nhọn . Các đường cao AE , BF của  AMB cắt nhau tại H , cắt (O) tại P, Q . Đường thẳng PB cắt tia QA tại S . Chứng minh:

a) OAB vuông b) Ba điểm P ,O , Q thẳng hàng

c) Độ dài FH không đổi khi M chuyển động trên cung lớn AB sao cho ABM nhọn

d) SH cắt PQ tại I . Chứng minh khi M di chuyển trên cung lớn AB thì I thuộc một đường tròn cố định

*HD :*

**Bài 50**. Cho (O;R) với đường kính AB cố định , EF là đường kính thay đổi . Kẻ đường thẳng d tiếp xúc với (O) tại B . Nối AE và AF cắt d tại M và N , kẻ AD EF cắt MN tại I . Chứng minh:

a) Tứ giác AEBF là hình chữ nhật b) AE.AM=AF.AN c) IM = IN

d) Gọi H là trực tâmMFN . Chứng minh khi đường kính EF thay đổi H luôn thuộc một đường tròn cố định

*HD :*

**Bài 51**. Cho (O) dây AB cố định điểm M thuộc cung lớn AB . Gọi I là trung điểm dây AB . Vẽ đường tròn (O’) qua M tiếp xúc với AB tại A . Tia MI cắt (O’) tại N và cắt (O;R) tại C . Chứng minh :

a) NA//BC b) INB ~ IBM

c) IB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp BMN

d) Bốn điểm A,B,N,O cùng thuộc một đường tròn ⬄ AB = R

*HD :*

**Bài 52**. Cho (O;R) và điểm A cố định nằm ngoài (O) . Vẽ đường thẳng d OA tại A . Trên d lấy điểm M . Qua M kẻ hai tiếp tuyến ME,MF . EF cắt OM tại H , cắt OA tại B . Chứng minh :

a) Tứ giác ABMH nội tiếp b) OA.OB=OH.OM=R2

c) Tâm I của đường tròn nội tiếpMEF thuộc một đường tròn cố định

d) Tìm vị trí của M để diện tích BHO lớn nhất

*HD :*

**Bài 53**. Cho ABC nhọn nội tiếp (O;R) các đường cao AD , BE,CF cắt nhau tại H . Kẻ đường kính AA’ . Gọi I là trung điểm BC . Chứng minh :

a) Tứ giác BCEF nội tiếp b) Ba điểm H,I,A thẳng hàng

c) DH. DA=DB.DC

d) Khi BC cố định , A chuyển động trên cung lớn BC sao cho ABC nhọn . Tìm vị trí của A để SEAH lớn nhất

*HD :*

**Bài 54**. Cho (O;R) đường kính AB . Gọi C là điểm chính giữa cung AB . Điểm E chuyển động trên đoạn BC , AE cắt BC tại H . Nối BH cắt AC tại K , KE cắt AB tại M . Chứng minh:

a) Tứ giác KCEF nội tiếp b) không đổi

c) Tìm vị trí của E để độ dài CM lớn nhất

d) Khi E chuyển động trên đoạn BC thì tổng BE.BC+AE.AH không đổi

*HD :*

**Bài 55**. Cho ABC nội tiếp (O) với góc A<900 . Gọi A’,B’,C’ là giao điểm của (O) với đường phân giác trong của ABC . Nối B’C’ cắt AB , AC tại M và N ,I là giao điểm của AA’,BB’,CC’ . Chứng minh:

a) AMN cân b) I là trực tâm A’B’C’

c) Tứ giác BIMC’ nội tiếp d) Cho BC cố định , A chuyển động trên cung lớn BC . Tìm vị trí của A để độ dài AI lớn nhất

*HD :*

**Bài 56**. Cho (O;R) đường kính AB . Điểm HOA , kẻ dây CDAB tại H . Vẽ (I) đường kính AH và (K) đường kính BH . AC cắt (I) tại E , BC cắt (K) tại F , EF cắt (O) tại M và N . Chứng minh :

a) Tứ giác HECF là hình chữ nhật b) Tứ giác ABFE nội tiếp

c) CMN cân d) Tìm vị trí của H để diện tích tứ giác CEHF lớn nhất

*HD :*

**Bài 57**. Cho ABC vuông tại A . Từ một điểm D trên cạnh BC kẻ đường thẳng vuông góc với BC cắt AC tại F và cắt tia đối của tia AB tại E . Gọi H là giao điểm của BF và CE , tia DH cắt (O) tại K. Chứng minh :

a) BHCE b) Tứ giác AEDC nội tiếp

c) AK//BH d) Khi D di chuyển trên BC thì H di chuyển trên 1 đường cố định

*HD :*

**Bài 58.** Cho ABC nhọn nội tiếp (O;R) các đường cao BH,CK cắt (O) tại D và E . Chứng minh:

a) 4 điểm B,H,C,K cùng thuộc một đường tròn b) DE//HK c) OAHK

d) Bán kính đường tròn ngoại tiếp AHK không đổi khi A chạy trên cung lớn BC

*HD :*

**Bài 59**. Cho ABC (AB<AC) nội tiếp (O;R). Tiếp tuyến với (O) tại A cắt BC tại S , St là phân giác góc ASC , dây cung ADSt cắt BC tại E . Chứng minh:

a) ASE cân b) DC=DB c) CD2=DE.DA d) Cho cung CD = 900, = 1200 tính DE,DA theo R

*HD :*

**Bài 60**. Cho (O;R) đường kính AB , M và N là hai điểm nằm trên cung AB theo thứ tự A,M,N,B . AB cắt AM tại S và BM cắt AN tại I . Chứng minh:

a) SIAB tại K b) AM.AS=AK.AB c) AM.AS+BN.BS=4R2

d) Biết MN//AB và MN=R Tính phần nằm ngoài (O)

*HD :*

**Bài 64.** Cho (O;R) đường kính AB , trên tia đối của tia BA lấy điểm C sao cho BC = R , lấy D trên (O) sao cho BD = R . Đường thẳng vuông góc với BC tại C cắt AD tại M . Chứng minh:

a) Tứ giác BCMD nội tiếp b) ABM cân tại B

c) ADB~ACM và tính AM.AD theo R

d) Cung BD chia ABM thành hai phần. Tính diện tích phần ABM nằm ngoài (O)

*HD :*

**Bài 65**. Cho ABC đều nội tiếp (O) đường kính AA’ . Trên cạnh AB lấy điểm M và trên cạnh CA kéo dài lấy điểm N sao cho BM=CN , MN cắt BC tại I . Chứng minh :

a) MA’N cân b) Tứ giác AMA’N , MBA’I nội tiếp

c) I là trung điểm MN

*HD :*

**Bài 66**. Cho đều nội tiếp (O) , một đường thẳng d thay đổi nhưng luôn đi qua A cắt hai tiếp tuyến tại B và C tương ứng là M và N , và d cắt (O) tại E khỏc A , MC cắt BN tại F . CM:

a) b) Tứ giác BMEF nội tiếp

c) Đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi d thay đổi

*HD :*

**Bài 67.** Cho Δ ABC nội tiếp đường tròn tâm O , tia phân giác trong của góc A cắt cạnh BC tại E và cắt đường tròn tại M

a)CMR :OM ⊥ BC

b)Dựng tia phân giác ngoài Ax của góc A . CMR : Ax đi qua một điểm cố định

c)Kéo dài Ax cắt CB kéo dài tại F . CMR : FB . EC = FC . EB

*HD :*

**Bài 68.** Cho đường tròn (O;R) và điểm A với OA = , một đường thẳng (d) quay quanh A cắt (O) tại M , N ; gọi I là trung điểm của đoạn MN .

a) CMR OI ⊥ MN. Suy ra I di chuyển trên một cung tròn cố định với hai điểm giới hạn B , C thuộc (O)

b)Tính theo R độ dài AB , AC . Suy ra A , O , B , C là bốn đỉnh của hình vuông

c)Tính diện tích của phần mặt phẳng giới hạn bởi đoạn AB , AC và cung nhỏ BC của (O)

*HD :*

**Bài 69.** Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R , C là trung điểm của cung AB . Trên cung AC lấy điểm F bất kì . Trên dây BF lấy điểm E sao cho BE = AF. Gọi D là giao điểm của đường thẳng AC với tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn.

a)Δ AFC và Δ BEC có quan hệ với nhau như thế nào ? Tại sao ?

b)CMR Δ FEC vuông cân c) CMR tứ giác BECD nội tiếp được

*HD :*

**Bài 70.** Cho một đường tròn đường kính AB , các điểm C , D ở trên đường tròn sao cho C , D không nằm trên cùng một nửa mặt phẳng bờ AB đồng thời AD > AC. Gọi các điểm chính giữa các cung AC , AD lần lượt là M , N ; giao điểm của MN với AC , AD lần lượt là H , I ; giao điểm của MD với CN là K

a)CMR:  cân b)CMR tứ giác MCKH nội tiếp được . Suy ra KH // AD

c)So sánh góc CAK với góc DAK

*HD :*

**Bài 71.** Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB . Một điểm M nằm trên cung AB ; gọi H là điểm chính giữa của cung AM . Tia BH cắt AM tại một điểm I và cắt tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) tại điểm K . Các tia AH ; BM cắt nhau tại S .

a)BAS là tam giác gì ? Tại sao ? Suy ra điểm S nằm trên một đường tròn cố định .

b)Xác định vị trí tưong đối của đường thẳng KS với đường tròn (B;BA)

c)Đường tròn đi qua B , I , S cắt đường tròn (B;BA) tại một điểm N . CMR đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định khi M di động trên cung AB.

d)Xác định vị trí của M sao cho .

*HD :*

**Bài 72.** Cho hai đường tròn (O­1) và (O2) tiếp xúc ngoài với nhau tại A , kẻ tiếp tuyến chung Ax. Một đường thẳng d tiếp xúc với (O1) , (O2) lần lượt tại các điểm B , C và cắt Ax tại điểm M . Kẻ các đường kính BO1D và CO2E.

a) CMR: M là trung điểm của BC b)CMR:  O1MO2 vuông

c)Chứng minh B , A , E thẳng hàng ; C , A , D thẳng hàng

d)Gọi I là trung điểm của DE . CMR đường tròn ngoại tiếp tam giác IO­1­O2 tiếp xúc với đường thẳng d

*HD :*

**Bài 73**. Cho đường tròn (O;R) đường kính AB và một điểm M bất kỳ trên đường tròn . Gọi các điểm chính giữa của các cung AM , MB lần lượt là H , I . Cãc dây AM và HI cắt nhau tại K . Hạ 

a)Chứng minh góc HKM có độ lớn không đổi

b)Chứng minh IP là tiếp tuyến của (O;R)

c)Gọi Q là trung điểm của dây MB . Vẽ hình bình hành APQS . Chứng minh S thuộc đường tròn (O;R)

d)CMR khi M di động thì thì đường thẳng HI luôn luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

*HD :*

**Bài 74**. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và hai điểm C , D thuộc nửa đường tròn sao cho cung AC < 900 và . Gọi M là một điểm trên nửa đường tròn sao cho C là điểm chính chính giữa cung AM . Các dây AM , BM cắt OC , OD lần lượt tại E và F . tia AM cắt tia BD tại S

a)Tứ giác OEMF là hình gì ? Tại sao ? b)CMR : D là điểm chính giữa của cung MB.

c) Một đường thẳng d tiếp xúc với nửa đường tròn tại M và cắt các tia OC , OD lần lượt tại I , K . CMR các tứ giác OBKM ; OAIM nội tiếp được.

d) Xác định vị trí của C và D sao cho 5 điểm M , O , B , K , S cùng thuộc một đường tròn

*HD :*

**Bài 75.** Cho  (AB = AC ) , một cung tròn BC nằm bên trong tam giác ABC và tiếp xúc với AB , AC tại B , C sao cho A và tâm của cung BC nằm khác phía đối với BC . Trên cung BC lấy một điểm M rồi kẻ các đường vuông góc MI , MH , MK xuống các cạnh tương ứng BC , CA , AB . Gọi giao điểm của BM , IK là P ; giao điểm của CM , IH là Q.

a)CMR các tứ giác BIMK, CIMH nội tiếp được .

b)CMR : MI2 = MH . MK

c) CMR tứ giác IPMQ nội tiếp được . Suy ra PQ  MI

d)CMR nếu KI = KB thì IH = IC

*HD :*

**Bài 76.** Cho Δ ABC cân (AB = AC) nội tiếp đường tròn (O). Điểm M thuộc cung nhỏ AC, Cx là tia qua M. Gọi D là điểm đối xứng của A qua O. Trên tia đói của tia MB lấy MH = MC , Gọi K và I theo thứ tự là trung điểm của CH và BC . CM:

a) Chứng minh: MA là tia phân giác của góc tia BMx.

b). Chứng minh: MD // CH. c)Tìm điểm cách đều bốn điểm A, I, C, K.

d) Khi M chuyển động trên cung nhỏ AC, tìm tập hợp các trung điểm E của BM.

*HD :*

**Bài 77.** Cho Δ ABC cân (AB = AC) và góc A nhỏ hơn 600; trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho AD = AC. Kéo dài đường cao CH của Δ ABC cắt BD tại E. Vẽ đường tròn tâm E tiếp xúc với CD tại F. Qua C vẽ tiếp tuyến CG của đường tròn này, Các đường thẳng AB và CG cắt nhau tại M

a)Tam giác BCD là tam giác gì ? tại sao? b) CM: Bốn điểm B E C G nội tiếp.

c)tứ giác AFGM là hình gì? Tại sao? d)CM: Δ MBG cân.

*HD :*

**Bài 78.** Cho đường tròn (O;R) và một điểm A nằm trên đường tròn. Một góc xAy = 900 quay quanh A và luôn thoả mãn Ax, Ay cắt đường tròn (O). Gọi các giao điểm thứ hai của Ax, Ay với (O) tư­ơng ứng là B, C. Đ­ường tròn đường kính AO cắt AB, AC tại các điểm thứ hai t­ương ứng là M, N. Tia OM cắt đường tròn tại P. Gọi H là trực tâm tam giác AOP. Chứng minh rằng:

a)AMON là hình chữ nhật b.MN // BC

c. Tứ giác PHOB nội tiếp đ­ược trong đường tròn.

d. Xác định vị trí của góc xAy sao cho tam giác 

*HD :*

**Bài 79.** Xét Δ ABC có các góc B, C nhọn. Các đường tròn đường kính AB và AC cát nhau tại điểm thứ hai H. Một đường thẳng d bất kì qua A lần lượt cắt hai đường tròn nói trên tại M, N. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của BC, MN

a) Chứng minh: H thuộc cạnh BC b) Tứ giác BCNM là hình gì? Tại sao?

c). Chứng minh bốn điểm A, H, P, Q thuộc một đường tròn.

d) Xác định vị trí của d để MN có độ dài lớn nhất.

*HD :*

**Bài 80**. Cho đường tròn (0) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN với đường tròn (B, C, M, N thuộc đường tròn và AM < AN). Gọi E là trung điểm của dây MN, I là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE với đường tròn.

a.C/m : Bốn điểm A, O, E, C cùng thuộc một đường tròn.

b..C/m : góc AOC bằng góc BIC c.C/m : BI // MN

d.Xác định vị trí cát tuyến AMN để diện tích tam giác AIN lớn nhất.

*HD :*

**Bài 81.** Cho đường tròn (0) bán kính R, một dây AB cố định ( AB < 2R) và một điểm M bất kỳ trên cung lớn AB. Gọi I là trung điểm của dây AB và (0’) là đường tròn qua M tiếp xúc với AB tại A. Đường thẳng MI cắt (0) và (0’) thứ tự tại N, P. CM

a) : IA2 = IP . IM b) tứ giác ANBP là hình bình hành.

c) IB là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác MBP.

d)Chứng minh rằng khi M di chuyển thì trọng tâm G của tam giác PAB chạy trên một cung tròn cố định.

*HD :*

**Bài 82.** Cho nửa đường tròn (0) đường kính AB, M là một điểm chính giữa cung AB. K thuộc cung BM ( K khác M và B ). AK cắt MO tại I. Gọi H là hình chiếu của M lên AK . CM:

a) : Tứ giác OIKB nội tiếp b) Tứ giác AMHO nội tiếp .

c)Tam giác HMK là tam giác gì ? d) OH là phân giác của góc MOK.

e)Xác định vị trí của điểm K để chu vi tam giác OPK lớn nhất (P là hình chiếu của K lên AB)

*HD :*

**Bài 83.** Cho tam giác ABC với ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (0). Tia phân giác trong của góc B, góc C cắt đường tròn này thứ tự tại D và E, hai tia phân giác này cắt nhau tại F. Gọi I, K theo thứ tự là giao điểm của dây DE với các cạnh AB, AC.

a) EBF, DAF cân. b) tứ giác DKFC nội tiếp và FK // AB

c) Tứ giác AIFK là hình gì ? Tại sao ?

d) Tìm điều kiện của tam giác ABC để tứ giác AEFD là hình thoi

*HD :*

**Bài 84** .Cho đường tròn (O), một đường kính AB cố định, trên đoạn OA lấy điểm I sao cho AI = . Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I. Gọi C là điểm tuỳ ý thuộc cung lớn MN ( C không trùng với M, N, B). Nối AC cắt MN tại E.CM:

a) Tứ giác IECB nội tiếp. b)AME và ACM đồng dạng => AM2 = AE . AC

c)AE .AC – AI .IB = AI2.

d) Hãy tìm vị trí của điểm C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

*HD :*

**Bài 85.** Cho (O) và một điểm A nằm ngoài (O). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến AMN với (O). (B, C, M, N cùng thuộc (O); AM<AN). Gọi E là trung điểm của dây MN, I là giao điểm thứ hai của đường thẳng CE với (O). CM :

a) bốn điểm A, O, E, C cùng nằm trên một đường tròn. b.

c) BI//MN. d. Xác định ví trí cát tuyến AMN để diện tích tam giác AIN lớn nhất.

*HD :*

**Bài 86** . Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Người ta vẽ đường tròn tâm A bán kính nhỏ hơn AB, nó cắt đường tròn (O) tại C và D, cắt AB tại E. Trên cung nhỏ CE của (A), ta lấy điểm M. Tia BM cắt tiếp (O) tại N. CMR :

a) BC, BD là các tiếp tuyến của đường tròn (A). b) NB là phân giác của góc CND.

c) CNM MND. d) Giả sử CN = a; DN = b. Tính MN theo a và b.

*HD :*

**Bài 87.** Cho (O; R), AB là đường kính cố định. Đường thẳng (d) là tiếp tuyến của (O) tại B. MN là đường kính thay đổi của (O) sao cho MN không vuông góc với AB và M ≠ A, M ≠ B. Các đường thẳng AM, AN cắt đường thẳng (d) tương ứng tại C và D. Gọi I là trung điểm của CD, H là giao điểm của AI và MN. Khi MN thay đổi, CMR :

a) Tích AM.AC không đổi. b) Bốn điểm C, M, N, D cựng thuộc một đường tròn.

c) Điểm H luôn thuộc một đường tròn cố định.

d) Tâm J của đường tròn ngoại tiếp tam giác HIB luôn thuộc một đường thẳng cố định.

*HD :*

**Bài 88.** Cho tam giác ABC vuông tại A, góc B lớn hơn góc C. Kẻ đường cao AH. Trên đoạn HC đặt HD = HB. Từ C kẻ CE vuông góc với AD tại E.

a) Chứng minh các tam giác AHB và AHD bằng nhau.

b) Chứng minh tứ giác AHCE nội tiếp và hai góc HCE và HAE bằng nhau.

c) Chứng minh tam giác AHE cân tại H. d) Chứng minh DE.CA = DA.CE

d) Tính góc BCA nếu HE//CA.

*HD :*

**Bài 89.** Cho (O;R), đường kính AB cố định, CD là đường kính di động. Gọi d là tiếp tuyến của (O) tại B; các đường thẳng AC, AD cắt d lần lượt tại P và Q. AI trung tuyến của tam giác APQ

a) CM: .

b) CM: CPQD nội tiếp c)AICD.

d) Xác định vị trí của CD để diện tích tứ giác CPQD bằng 3 lần diện tích tam giác ABC.

*HD :*

**Bài 90**. Cho tam giác ABC vuông ở A và góc B lớn hơn góc C, AH là đường cao, AM là trung tuyến. Đường tròn tâm H bán kính HA cắt đường thẳng AB ở D và đường thẳng AC ở E.

a) Chứng minh D, H, E thẳng hàng. b) Chứng minh :.

c) Chứng minh bốn điểm B, C, D, E nằm trên đường tròn tâm O. Tứ giác AMOH là hình gì?

d) Cho góc ACB bằng 300 và AH = a. Tính diện tích tam giác HEC.

*HD :*

**Bài 91**. Cho ba điểm A, B, C thẳng hàng (điểm B thuộc đoạn AC). Đường tròn (O) đi qua B và C, đường kính DE vuông góc với BC tại K. AD cắt (O) tại F, EF cắt AC tại I.

a) Chứng minh tứ giác DFIK nội tiếp được.

b) Chứng minh góc DHA và góc DEA bằng nhau.

c) Chứng minh AI.KE.KD = KI.AB.AC.

d) AT là tiếp tuyến (T là tiếp điểm) của (O). Điểm T chạy trên đường nào khi (O) thay đổi nhưng luôn đi qua hai điểm B, C.

*HD :*

**Bài 92**. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Vẽ trung tuyến AM, phân giác AD của góc BAC. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM cắt AB tại P và cắt AC tại Q. a).Chứng minh

b)Chứng minh BD.AM = BA.DP.

c)Giả sử BC = a; AC = b; BD = m. Tính tỉ số theo a, b, m.

d) Gọi E làđiểm chớnh giữa cung PAQ và K là trung điểm đoạn PQ. Chứng minh ba điểm D, K, E thẳng hàng.

*HD :*

**Bài 93.** Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp trong đường tròn, P là một điểm trên cung nhỏ AC ( P khỏc A và C). AP kéo dài cắt đường thẳng BC tại M.

a) Chứng minh: .

b) Chứng minh AB2 = AP.AM.

c) Giả sử hai cung AP và CP bằng nhau, Chứng minh AM.MP = AB.BM.

d) Tìm vị trí của M trên tia BC sao cho AP = MP.

e) Gọi MT là tiếp tuyến của đường tròn tại T, chứng minh AM, AB, MT là ba cạnh của một tam giác vuông.

*HD :*

**Câu 94**. Cho tam giác ABC vuông cân ở A, trên cạnh BC lấy điểm M. Gọi (O1) là đường tròn tâm O1 qua M và tiếp xúc với AB tại B, gọi (O2) là đường tròn tâm O2 qua M và tiếp xúc với AC tại C. Đường tròn (O1) và (O2) cắt nhau tại D (D không trùng với A) BO1 cắt CO2 tại E .CMR :

a) BCD là tam giác vuông.

b) O1D là tiếp tuyến của (O2).

c) 5 điểm A, B, D, E, C cùng nằm trên một đường tròn.

d) Xác định vị trí của M để O1O2 ngắn nhất.

*HD :*

**Câu 95** .Cho tam giác ABC nhọn, đường cao kẻ từ đỉnh B và đỉnh C cắt nhau tại H và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC lần lượt tại E và F. CMR:

a) AE = AF. b) A là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EFH.

c) Kẻ đường kính BD, chứng minh tứ giác ADCH là hình bình hành.

*HD :*

**Câu 96** . Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn đường kính AH cắt cạnh AB tại M và cắt cạnh AC tại N. Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với MN cắt cạnh BC tại I. CMR :

a) MN là đường kính của đường tròn đường kính AH.

b) tứ giác BMNC nội tiếp. c)BI = IC.

*HD :*

**Câu 97.** Cho tam giác ABC vuông tại C, O là trung điểm của AB và D là điểm bất kỳ trên cạnh AB (D không trùng với A, O, B). Gọi I và J thứ tự là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACD và BCD. CMR :

a) OI // BC. b) 4 điểm I, J, O, D nằm trên một đường tròn.

c) CD là tia phân giác của góc BAC khi và chỉ khi OI = OJ.

*HD :*

**Bài 98**. Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AD. Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại E. Hình chiếu vuông góc của E trên AD là F. Đường thẳng CF cắt đường tròn tại điểm thứ hai là M. Giao điểm của BD và CF là N. CMR :

a) CEFD là tứ giác nội tiếp. b) Tia FA là tia phân giác của góc BFM.

c) BE.DN = EN.BD.

*HD :*

**Bài 99**. tam giác ABC cân tại A, nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường kính AD. Gọi M là trung điểm của AC, I là trung điểm của OD.

a) Chứng minh OM // DC.

b) Chứng minh tam giác ICM cân.

c) BM cắt AD tại N. Chứng minh IC2 = IA.IN.

*HD :*

**Câu 100**. Cho tam giác vuông ABC tại C , nội tiếp trong đường tròn tâm O . Trên cung nhỏ AC ta lấy một điểm M bất kỳ ( M khác A và C ) . Vẽ đường tròn tâm A bán kính AC , đường tròn này cắt đường tròn (O) tại điểm D ( D khác C ) . Đoạn thẳng BM cắt đường tròn tâm A ở điểm N .

a, Chứng minh MB là tia phân giác của góc . b, Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn tâm A nói trên . c, So sánh góc CNM với góc MDN . d, Cho biết MC = a , MD = b . Hãy tính đoạn thẳng MN theo a và b .

*HD :*

Câu 101 . Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O , đường phân giác trong của góc A cắt cạnh BC tại D và cắt đường tròn ngoại tiếp tại I .

Chứng minh rằng OI vuông góc với BC .

Chứng minh BI2 = AI.DI .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên BC . Chứng minh góc BAH = góc CAO .

*HD :*

Câu 102. Cho tam giác ABC , M là trung điểm của BC . Giả sử .

Chứng minh rằng tam giác ABM đồng dạng với tam giác CBA .

Chứng minh minh : BC2 = 2 AB2 . So sánh BC và đường chéo hình vuông cạnh là AB .

Chứng tỏ BA là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMC .

Đường thẳng qua C và song song với MA , cắt đường thẳng AB ở D . Chứng tỏ đường tròn ngoại tiếp tam giác ACD tiếp xúc với BC .

*HD :*

Câu 103 . Cho hình bình hành ABCD có đỉnh D nằm trên đường tròn đường kính AB . Hạ BN và DM cùng vuông góc với đường chéo AC . CM:

Tứ giác CBMD nội tiếp .

Khi điểm D di động trên trên đường tròn thì không đổi .

DB . DC = DN . AC

*HD:*

**Câu 104**. Cho tam giác nhọn ABC và đường kính BON . Gọi H là trực tâm của tam giác ABC , Đường thẳng BH cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại M .

Chứng minh tứ giác AMCN là hình thanng cân .

Gọi I là trung điểm của AC . Chứng minh H , I , N thẳng hàng .

Chứng minh rằng BH = 2 OI và tam giác CHM cân .Câu 105. Cho hình vuông ABCD cố định , có độ dài cạnh là a .E là điểm đi chuyển trên đoạn CD ( E khác D ) , đường thẳng AE cắt đường thẳng BC tại F , đường thẳng vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng CD tại K .

Chứng minh tam giác ABF = tam giác ADK từ đó suy ra tam giác AFK vuông cân .

Gọi I là trung điểm của FK , Chứng minh I là tâm đường tròn đi qua A , C, F , K .

Tính số đo góc AIF , suy ra 4 điểm A , B , F , I cùng nằm trên một đường tròn

*HD:*

**Câu 106**. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Đường phân giác trong của góc A , B cắt đường tròn tâm O tại D và E , gọi giao điểm hai đường phân giác là I , đường thẳng DE cắt CA, CB lần lượt tại M , N .

Chứng minh tam giác AIE và tam giác BID là tam giác cân .

Chứng minh tứ giác AEMI là tứ giác nội tiếp và MI // BC .

Tứ giác CMIN là hình gì ?

*HD:*

**Câu 107**. Cho đường tròn tâm O và cát tuyến CAB ( C ở ngoài đường tròn ) . Từ điểm chính giữa của cung lớn AB kẻ đường kính MN cắt AB tại I , CM cắt đường tròn tại E , EN cắt đường thẳng AB tại F .

Chứng minh tứ giác MEFI là tứ giác nội tiếp .

Chứng minh góc CAE bằng góc MEB .

Chứng minh : CE . CM = CF . CI = CA . CB

*HD:*

**Câu 108**. Cho tam giác vuông ABC ( góc A = 1 v ) có AC < AB , AH là đường cao kẻ từ đỉnh A . Các tiếp tuyến tại A và B với đường tròn tâm O ngoại tiếp tam giác ABC cắt nhau tại M . Đoạn MO cắt cạnh AB ở E , MC cắt đường cao AH tại F . Kéo dài CA cho cắt đường thẳng BM ở D . Đường thẳng BF cắt đường thẳng AM ở N .

Chứng minh OM//CD và M là trung điểm của đoạn thẳng BD .

Chứng minh EF // BC .

Chứng minh HA là tia phân giác của góc MHN .

*HD:*

**Câu 109**. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . M là một điểm trên cung AC ( không chứa B ) kẻ MH vuông góc với AC ; MK vuông góc với BC .

1) Chứng minh tứ giác MHKC là tứ giác nội tiếp .

2) Chứng minh 3) Chứng minh Δ AMB đồng dạng với Δ HMK .

*HD:*

**Bài 110.** Cho ∆PBC nhọn. Gọi A là chân đường cao kẻ từ đỉnh P xuống cạnh BC. Đường tròn đường khinh BC cắt cạnh PB và PC lần lượt ở M và N. Nối N với A cắt đường tròn đường kính BC tại điểm thứ 2 là E.

1. Chứng minh 4 điểm A, B, N, P cùng nằm trên một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn ấy?

2. Chứng minh EM vuông góc với BC.

3. Gọi F là điểm đối xứng của N qua BC. Chứng minh rằng: AM.AF=AN.AE

*HD:*

**Bài 111.** Cho BC là dây cung cố định của đường tròn tâm O, bán kính R(0<BC<2R). A là điểm di động trên cung lớn BC sao cho ∆ABC nhọn. Các đường cao AD, BE, CF của ∆ABC cắt nhau tại H(D thuộc BC, E thuộc CA, F thuộc AB).

1. Chứng minh tứ giác BCEF nội tiếp trong một đường tròn. Từ đó suy ra AE.AC=AF.AB.

2. Gọi A’ là trung điểm của BC. Chứng minh AH=2A’O.

3. Kẻ đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (O) tại A. Đặt S là diện tích của ∆ABC, 2p là chu vi của ∆DEF.

a. Chứng minh: d//EF. b. Chứng minh: S=pR.

*HD:*

**Bài 112**. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Điểm I nằm giữa A và O (I khác A và O).Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I. Gọi C là điểm tuỳ ý thuộc cung lớn MN (C khác M, N, B). Nối AC cắt MN tại E. Chứng minh:

1. Tứ giác IECB nội tiếp. 2. AM2=AE.AC 3. AE.AC-AI.IB=AI2

*HD:*

**Bài 113**. Trên một đường thẳng lấy ba điểm A, B, C cố định theo thứ tự ấy. Gọi (O) là đường tròn tâm O thay đổi nhưng luôn luôn đi qua A và B. Vẽ đường kính I J vuông góc với AB; E là giao điểm của I J và AB. Gọi M và N theo thứ tự là giao điểm của CI và C J ( M I, N J). CM :

1/. IN, JM và CE đồng quy tại D.

2/. Gọi F là trung điểm của CD. Chứng minh OF  MN.